

LEONHARDI EULERI
M E C H A N I C A
SIVE MOTUS SCIENTIA
ANALYTICE EXPOSITA

EDIDIT
PAUL STÄCKEL

TOMUS ALTER



LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

MECHANICAE

TOMUS ALTER

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE

EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO E
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

—

PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A. 1736.

PRAEFATIO

Quemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis satorum exposui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare constitui; eferentia in motus explicatione tanti est momenti, ut ex ea merito totius operis difacta. In motu enim libero via a corpore descripta cum ex motu iam insito, tum tentiis tam absolutis quam resistentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia pre tentiis et resistentiam nihil adesse ponitur, quod corporis motum determinet. Aircō motus libori haec est primaria proprietas, ut via a corpore descripta omnino undatur; canalis scilicet secundum viam, quam corpus describere debet, exacte incurv corpore transeunte nullam omnino pressionem sustinebit, sed corpus per eam libera trit. In motu autem non libera praeter potentiis et resistentiam, quibus corpus sollicita in praescriptam esse ponimus, ita ut corpus sit coactum in hac via moveri. Haec a praescripta ad instar canalıs comodo considerari potest, in quo corpus movetur, ne ea erumpere potest. Cum igitur in istiusmodi motibus data sit via, in qua corpus moet, inquirendum est, quantam corpus a quibuscunque potentiis et resistentia sollicitis singulis locis habiturum sit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte coetur. Praeterea autem cum corpus, nisi in hoc canali esset inclusum, aliam lineam deet, retinebit saltem in canali conatum in ea linea, in qua, si liberam esset, moveregrediendi hocque conatu latera canalıs premet ob, nisi satis habeant firmitatis, reumpot. Hanc ob rem praeter celeritatem, quam corpus in singulis canalıs locis habeterminari debet quoque pressio, quam in latera canalıs exercet, eiusque pressionis direa firmitas laterum canalıs ad corpus retinendum requisita cognoscatur. Huismodi autus non liberi etiam sine canali aliis modis produci possunt, id quod observare licetadulis atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea moveri cogitur. Pendulis eant HUGENIUS docuit, effici potest, ut corpus in quacunque curva praescripta moveri coguadmodum in pendulis tam simpliciter suspensis, quibus corpus in linea circulari mo

cogitur, apparet, tam his, quae intra cycloides suscipiendi valent, quibus corpus moveri cogitur; similique modo effici potest, ut corpus in data quaque curva non

Haec igitur est prima species motus non liberi, qui fit super data linea autem alia species motus non liberi attendi meretur, in qua non quod quodlibet tum superficies praescribitur, in qua corpus moveri cogitur; immo certum est, liberorum species est restricta quam prior, cum in hoc corpore adhuc sit etiam vim in data superficie solum eligendi. Hanc ubi rem hanc modo non tractari debet, ut primo lineam in data superficie determinetur, quam corporis resistantia sollicitatum describet, deinde vero, ut eadem corporis motus in punctis delineatur, tertio denique, ut etiam pressum, quam corpus in se investigetur. Huiusmodi autem motus non liberi partem ac priorem penduli modo representari possunt; corpus enim pendulum oblique suspensum, ut esset in plano verticali, lineam curvam vixi generis describit, quae autem superficies sphaerica, cuius centrum in ipso suspensionis puncto est. Insuper etiam huc redit, ut in superficie sphaerica primo lineam, quam corpus praedictum describit, deinde vero eadem in singulis locis et tertio pressum, quae in se. Simili modo etiam perspicitur effici posse, ut corpus pendulum non ad sphaericum, sed ad aliam quaque restringatur, dum eadem curva punctum et superficies evoluta disponatur. Haec igitur est altera motuum non liberorum species motu super data superficie determinanda occupatur; atque in hoc deinde errorum speciebus indugendis totus hic Tomus secundus absolvitur.

Quo ergo ad hanc translationem, quam velis necesse est, praepono primo fundamenta et principia exposui, ex quibus, quae ad rotationem et motum non liberorum pertinent, derivari possunt. Demonstravi autem etiam potentias sollicitatum tam super data lineam quam super superficie motum habere; in superficie autem fore vim a corpore descriptam quae in hoc puncto in ea superficie dici potest. Deinde investigavi leges generales, quae quae quae etiam resistantia tum in accelerando vel retardando motum, tum in perpendendo. Ad hanc etiam doctrinam de vi centrifuga exponitur, quoniam corpora etiam in sollicitata exercent quaeque ex motu curvilineo, qui corpus in hoc puncto.

In Capitulis deinde secundo et tertio motus corporum super data linea, quam in medio resistente fuso contempler et excoquo. Primo motum in quo corpus a quibusvisque potentias sollicitatum super data linea sive movetur, sive descendendo sive ascendendo; atque si curva sit foveat corpus descendens quam ascensus producat sit idonea, oscillationes quoque etiam se ratione temporum comparo; atque in hoc negotio melior et propior tam in circulo quam cycloide factum delinea. Denique problema 17, 18,

tissimum pro datis potentiis sollicitantibus in curvas inquiri, super quibus motus debet proprietatem. Huc scilicet pertinent problemata de inveniendis curvis aequalitatis, seu ascensus vel recessus a dato puncto et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam sunt tractata, vel ad quae ipsum institutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachystochronis et tautochronis, quorum utrumque ad ulteriorem, quam adhuc quodvis est factum, perfectionis gradum evexi. Circa curvas enim brachystochronas errorum a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi et loco praecepi HugENIANI in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quod demonstravi in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesis quaecunque competno curvam esse brachystochronam, super qua corpus ita moveatur, ut tota praecipua vis sit maior quam vis centrifuga. Simili modo novam atque genuinam curvas tautochronas inveniendi methodum trado (quae enim ante sunt inventae tautochronae, nulla alia methodo, sed potius divinatione sunt erutae), cuius ope non solum cycloidem tantum sub tautochronae nomine celebrem inveni, sed praeter eam innumerabiles alias curvas necita satisficientes elici, inter quas adeo curvam algebraicam observavi; praeterea aliis agnatis quaestionibus in vacuo quam ex integra huius negotii tractatione pro modo resistente praestantiam et utilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum haec methodus instar speciminis tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, quoque passim in difficiliorem quorundam problematum solutionibus non contemnenda analysos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promotae esse videntur.

In quarto denique Capite matum super data superficie persequor, quae doctrina, ut huiusmodi adhuc est tacta, ita quoque tractata est difficillima propter naturam et proprietatem solidorum nondum satis perspectas neque ad calculum revocatas. Antequam igitur de huiusmodi motu quicquam statui patuerat, methodum exponere necesse erat, qui proprietatem superficierum et linearum in iis ductarum erui atque calculo subiei possent. Hoc ita instituti ope aequationum tres quantitates variables continentium, quibus iam ante tum in Tomo III ad lineam brevissimam super quavis superficie determinandum, tum in huius Tractatus Tomo praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inveniendos sum usus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpore super superficieribus motu definiendos, ex quibus modum elici tam viam a corpore descriptam quam reliqua motus symptomata inveniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus sumitur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis, omnia resistuntia omnia ad vacuumavitatem ordinariam reduxi atque praecipuo motum pendulorum oblique oscillantium pertractatus, cuius motus anomalias et absidum progressionem diligenter determinavi.

Haec igitur sunt, quae in isto Tomo secundo summa complexus, quibus expeditis operabor, ut, quam primum licuerit, motus corporum linearum et primo quidem rigidorum ordinem reducam atque pari methodo exponam.

INDEX CAPITUM¹⁾

TOMI SECUNDI

Caput primum. De motu non libero in genere	
Caput secundum. De motu puncti super data linea in vacuo .	
Caput tertium. De motu puncti super data linea in medio res	
Caput quartum. De motu puncti super data superficie	

1) Index ab editore additus est. P. St.

CAPUT PRIMUM

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE

DEFINITIO 1

Corpus non libere moveri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quo iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insitione potentiarum sollicitantium moveri deberet.

SCHOLION 1

In motu puncti libero, quomodo parte prima exposuimus, spatium, in quo corpus movebatur, ab omnibus obstaculis vacuum assumimus; nunc vero non ita comparatum ponemus, ut corpori non liceat in quaque directione transire propter firmos parietes transitum non permittentes.

COROLLARIUM 1

Quando itaque corpus in motu suo obstaculum invenit ideoque eam directionem, secundum quam tendit, conservare non potest, tum vel quiescere vel aliam directionem motum continuare debet.

COROLLARIUM 2

In quamquam autem directione corpus progrediatur post occursum obstaculi, ex circumstantiis tum motus tum positionis obstaculi iudicari debet.

SCHOLION 2

Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percussione pertinere, sed in hoc libro non agitur. Hoc vero libro alius generis obsta-

SCHOLIUM 5

10. In his autem motibus tam super lineis quam superficiebus datum ab omni frictione abstrahimus neque ullam motus retardationem nemus. Quamobrem lineae et superficies, super quibus puncta moventur, levissimae concipi debent et omni asperitate destitutae, ne motus retardationi propter eam sit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae in sequentibus explicari possunt. Hanc ob rem punctum quasi puncto moveri concipiendum est, ut eius pars quaeque, si modo in partibus concipi possunt, eundem habeat motum.

SCHOLIUM 6

11. Quae igitur in praecedente libro traditae sunt et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari possunt, si modo eorum motus sibi sit perpetuo parallelus et omnes partibus corporis aequali motu sint praeditae. Hoc vero ex sequentibus libris clarius apparebit, quibus casibus finitorum corporum motus a motu punctorum differere sciret. Quocirca in his libris ideo puncta tantum consideramus, quia, si partibus destituuntur, ita etiam in partibus diversi motus inesse nequeunt.

PROPOSITIO 1

THEOREMA

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data movetur et a nullis potest sollicitari, perpetuo eandem celeritatem conservabit, si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituent.*

DEMONSTRATIO

Quia corpus, dum in linea AM (Fig. 1, p. 10) movetur, a nulla potest sollicitari neque frictioni ullas conceditur locus, motus corporis aliter variare non equit, nisi quatenus linea AM impedit, quo minus corpus libere moveri possit. Ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, investigandum est. Sit celeritas quam corpus in M habet, $= c$; hac igitur celeritate corpus, si libere moveretur a tangente Mv progrediretur; quod vero, quia corpus curvam AM describit, non potest.

non potest, fieri nequit, sed corpus cogitur per Mm progredi concipiatur motus corporis secundum Mv resolutus in

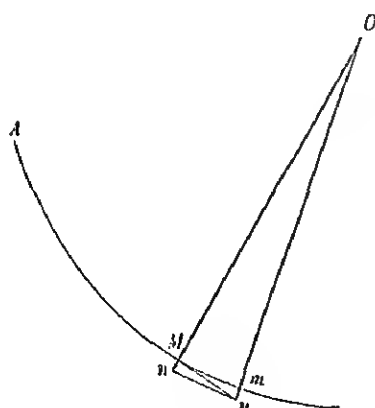


Fig. 1.

motum per Mn , existens in rectangulo. Perspectum per Mn , cuius directio est elementum Mm , ponitur effectum in celeritate in Mm . Corpus igitur altero motu celeritate, quae est ad priorem Mm ad Mv ; quare celeritas elementum Mm describit, est vero Mv m est triangulum ideoque $Mm < Mv$, celeritas quam prior c atque celeritas erit $= \frac{(Mv - Mm)c}{Mv}$. Ad hunc

dum sit MO , radius osculi curvae in M , $= r$ et elementum ds ob ang. $O = \text{ang. } mMv$, $MO : Mm = Mm : mv$, ex quo

$$Mv = \sqrt{(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2})} = \frac{ds}{r} \sqrt{r^2 + ds^2} = ds \sqrt{1 + \frac{ds^2}{r^2}}$$

Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus ds percurrit,

$$= \frac{cds^2}{2r^2},$$

cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus portionem percurrit. At expressio $\frac{cds^2}{2r^2}$ aequivaleret differentiale eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quare celeritatis, postquam corpus quantumvis arcum curvae infinite parvum atque corpus motu uniformi feretur per si modo radius osculi r nusquam fuerit infinite parvus.

COROLLARIUM 1

13. In omni igitur curva, in qua radius osculi nusquam corpus movebitur uniformiter, siquidem a nullis potentibus frictionem patitur.

COROLLARIUM 2

14. Si radius osculi est infinito parvus, tunc $\frac{cds^2}{2r^3}$ vel est quantitas finita differentiale primi gradus. Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite parvum.

COROLLARIUM 3

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curvis sint rara et a vicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu uniformi percurret.

SCHOLION 1

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, non esse possunt, nisi ubi curva habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur et normaliter in punctum cuspidis impingitur. Igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnem motum amittere debet; nisi forte corpus ponatur elasticum, et eodem celeritate, qua incurrit, reflectetur atque ita motum uniformem conservabit. In cuspile enim duo elementa angulum infinite acutum continent.

SCHOLION 2

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curvis puncta, in quibus curvæ radius est infinito parvus; quia vero duo quæque elementa celeritatis qua ferro in directam sunt posita et angulus deinceps positus est infinitus, fieri non potest, ut ex demonstratione apparet, ut corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem, cum istiusmodi puncta sunt rara, corpus nihilominus motu æquabili movebitur.

COROLLARIUM 4

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curva semper motu æquabili feretur; at si non sit elasticum, cuspides tantum motum tollunt, dum cum prorsus tollunt.

19. Ut haec clarius percipiantur, sint duo curvae elementa et anguli ABC , quem constituent, deinceps positus CB



Fig. 2.

cujus sinus sit dz posito sinu tota AB AB deinceps in BD progredi conatur celeritate c eius motus duplex concipiatur, alter in directione ad BC , alter in directione ad BD non potest. Domisso igitur

perpendiculo DC corpus altero motu per BC movebitur celeritate c ad priorem ut BC ad BD , i. e. ut $\sqrt{1 - dz^2}$ ad 1. Per BD celeritatem $= c\sqrt{1 - dz^2}$ sen $c - \frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis $\frac{cdz^2}{2}$, quod acquivalet differentiali secundi gradus. Ex quo patet in quaque curva angulus CBD fuerit infinite parvus, celeritas debili esse progressurum. At in omni curva angulus ABC parvus vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accipitur, cuspidibus tantum motus uniformitatem perturbant, nisi corpore quo casu nihilominus motus uniformitas conservatur.

PROPOSITIO 2

THEOREMA

20. Dum corpus motu uniformi in curva AM (Fig. 1, singulis punctis M premet curvam normaliter vi, quae est ad altitudinem tatis ut altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium osculi

DEMONSTRATIO

Si corpus in curva AM libere moveri deberet motu aequo viam adesse oporteret normalem corpus secundum MO trahere se haberet ad corporis gravitatem ut altitudo celeritati commensuratum dimidium radium osculi MO , ut ex demonstratis libri praecedentis apparet. Nisi enim talis vis adesset, corpus in linea recta autem casu canalibus AM , in quo corpus inclusum concipitur, corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi

premet secundum directionem Mn . Si enim talis vis normalis adesset, corpus in canali AM libere moveretur neque illum premeret; hac vero vi absente hic ponimus, necesse est, ut corpus ipsum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur v et radius osculi $MO = r$ atque gravitas corporis $= 1$, quam scilicet haberet, si in superficie terrae esset positum, erit vis, qua corpus canalem in M secundum Mn premet, $= \frac{2v}{r}$.

COROLLARIUM 2

22. Si corpus maiore vel minore celeritate moveretur in curva AM , tunc pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quod altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

COROLLARIUM 3

23. Directio huius pressionis est normalis in curvam et directe contra positionem radii osculi MO . Quare radius osculi in alteram curvae partem productus dabit directionem huius pressionis.

COROLLARIUM 4

24. Si corpus in linea recta movetur, haec pressio erit nulla ob radius osculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perspicuum est. Corpus enim motum in recta uniformiter sponte progreditur et hanc ob rem canalium rectum non premit.

COROLLARIUM 5

25. Si curva AM fuerit circulus, pressio ubique erit eadem. Eo quod maior erit, quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem pressio erit reciproce ut radius circuli.

SCHOLION 1

26. Quo corpus in curva AM libere moveri possit uniformiter, necesse est, ut secundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi possit

corpus tanta vi in plagam oppositam niti; alioquin enim illud opus ad corpus in curva conservandum. Dum igitur corpus moveri cogitur neque eius nisus a vi normali tollitur, hunc in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitudinem debet, ut hanc pressionem sustinere queat.

COROLLARIUM 6

27. Apparet igitur corpus motum sine ullo celeritatis dispendio tenere posse, qui scilicet consistit in pressione definita.

COROLLARIUM 7

28. Ex motu ergo solo pressio oriri potest. Quamobrem, pressione seu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu pressio potest.

SCHOLION 2

29. Intelligitur hinc, quod iam supra innuimus libro primo certum esse, utrum motus potentiis debeatur an vero potentiae motui. Enim in mundo utrumque, potentias nempe et motum, existere debet, alterius sit causa, quaestio est tum ex ratione tum ex observatione decidenda. Rationi quidem minime consentaneum videtur corpori insitos tribuere, multo minus potentias per se existentes statuere, vero is phaenomenorum causas genuinas dedisse consensum est, motu orta demonstraverit. Motum enim semel existentem per se variari debere clare ostendimus supra (§ 63); hic vero, quemadmodum potentiae oriuntur, exposuimus. Quemadmodum vero potentiae existere vel conservari queant, concipi non potest. Quamobrem omnes potentias, quae in mundo conspiciuntur, a motu proveniendi scrutatori incumbit investigare, ex quonam quorumque causa quaelibet potentia in mundo observata ortum suum habeat.

SCHOLION 3

30. Cum difficile intellectui sit, quomodo talis effectus, continua, a corpore moto sine ullo celeritatis dispendio oriatur, erit in huius rei causam inquirere. Vidimus in praecedentibus

am corporis in curva linea non absolute aequabilem esse, sed celeritatem
 erit decrementum pati, dum corpus per singula elementa curvae movetur.
 ec vero decrementa differentialibus secundi gradus aequivalent, ut celeritas
 nitius repetita celeritatem corporis infinite parvam tantum minueret quod
 e igitur infinite parvo celeritatis decremento pressionem adscribi de-
 beo; in hacque sententia eo magis confirmor, quod, quo minus sit
 eritatis decrementum, eo maior quoque existat pressio. Cum pressio
 sit $\frac{2v}{r}$ hacque vi totum elementum Mm , dum percurritur, prematur, li-
 us pressionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2vds}{r}$. Supra
 incrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inven-
 ient $\frac{cds^2}{2r^3}$ (§ 12). Quod autem ibi erat c , hic nobis est \sqrt{v} ; ergo cum
 $dc = \frac{cds^2}{2r^3}$, erit

$$-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^3} \quad \text{sen} \quad -dv = \frac{vds^2}{r^2}.$$

obitur ergo $-4vdr = \frac{4r^3ds^2}{r^3} =$ quadrato pressionis, quam sustinet
 tum Mm .

COROLLARIUM 8

31. Quadratum pressionis ergo in Mm exercitatio aequivalet decrom-
 us $2v^2$. Atque si hoc decrementum aequale fuerit ipsi ds^2 , tum pr-
 ualis est vi gravitatis, ex quo comparatio harum pressionum cognosc-

COROLLARIUM 9

32. His ergo concessis istud infinities infinite parvum celeritatis d-
 tum sufficit ad pressionem finitam producendam. Quamdiu enim ip-
 decrementum homogeneum est ipsi ds^2 , pressio est finita; sin vero id-
 mentum infinities minus existeret quam ds^2 , pressio quoque foret
 o magna.

DEFINITIO 2

33. Pressio haec, quam corpus in linea curva motum exercet in hanc lin-
 tur vis centrifuga, eo, quod eius directio a centro circuli osculatoris O te-

COROLLARIUM 1

34. Vis centrifuga ergo est ad vim gravitatis ut altitudo celeritati
 a ad dimidium radium osculi.

COROLLARIUM 2

35. Quando ergo corpus in linea curva moveri cogitur centrifuga premit, etiamsi a nulla potentia sollicitetur.

SCHOLION

36. Quando vero corpus a potentiis quoque sollicitatur in canalem ab his potentiis oriatur tamquo canalis duplici partim nempo a potentiis, partim a vi centrifuga. Nunc igitur in corpus non libere motum valeant, investigandum est.

PROPOSITIO 3

THEOREMA

37. Si corpus, quod in canali AM (Fig. 3) movetur, potentia MN , cuius directio normalis est in curvam AM , celeritas neque minuetur, sed tota potentia in premendo canali consumitur.

DEMONSTRATIO

Ex priore libro [§ 164] manifestum est potentiam, cuius directionem motus sit normalis, celeritatem neque augere neque

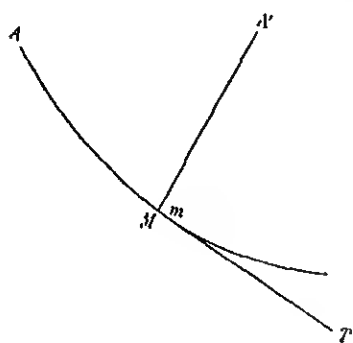


Fig. 3.

quam hocenim ibi do motum stratum, hic tamen eo habet, cum potentia normalis in consequentia neque in. In motu libero vero potentiam corporis immutatur hoc loco habere non potest apprimetur corpus ad quenter tanta vi canale. tione MN . Q. E. D.

COROLLARIUM 1

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem fugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim, casu minuit.

COROLLARIUM 2

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curvae partem in effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam in normalis vis in concavam partem dirigitur, minuetur effectus.

COROLLARIUM 3

40. Si vis normalis fuerit $= N$ et vis centrifuga ut ante $= \frac{2v}{r}$, curva vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si haec viros fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r}$ fuerint contrariae.

COROLLARIUM 4

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, eandem pressionem sustinebit, seu corpus ex ea egredi non conabitur. In casu eandem curvam corpore libero describeret; id quod perspicuum est ex vi normali, quae tunc est $\frac{2v}{r}$; hac enim officitur, ut corpore libere in quacunque curva libere moveatur.

PROPOSITIO 4

THEOREMA

42. Si corpus, quod in canali AM (Fig. 3, p. 16) movetur, in M sollicitum sit, cuius directio sit secundum tangentem MT , huius effectus in hoc con- celeritatem corporis vel augeat vel diminuat eodem modo quo in motu libero.

DEMONSTRATIO

Quia huius potentiae directio est ipsa canalis tangens MT , contra- ctum huius potentiae impediri non potest; neque etiam in canalem potentia nullum effectum exercere poterit. Quamobrem augebit haec pot- diminuet celeritatem corporis, prout eius directio directioni corpori- spirans vel contraria fuerit, prorsus ac si corpus libere moveretur. A- ta altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$ c- ' $= T$, erit $dv = Tds$ accelerante potentia T ; at retardante ea $= -Tds$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

43. In motu corporum igitur super lineis datis vis non tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tan-

COROLLARIUM 2

44. Cum vis resistentiae effectum vis tangentialis rotat eodem quoque modo agat in motum corporum super datis liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem stentia R , prodibit ex ambabus coniunctum $dv = Tds - Rds$.

PROPOSITIO 5

PROBLEMA.

45. Si corpus super linea data AM (Fig. 4) moveatur in resistente et insuper sollicitetur a potentia absoluta, cuius directio minare effectum tam potentiae absolutae quam resistentiae nequam curva AM sustinet.

SOLUTIO

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis resistentiae soluta $MP = P$, cuius directio sit talis, ut sumto ele-

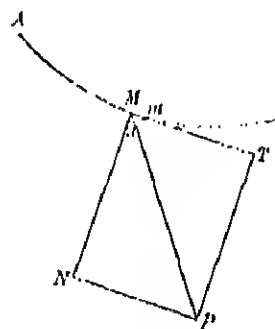


Fig. 4.

perpendiculum mn ex m in MP ductum. $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Resolvatur ds secundum MN normalem in tangente trahentes; erit ob triangula similia vis normalis MN seu $PT = P \frac{dx}{ds}$. Tangentialis $MT = \frac{Pdy}{ds}$ celeritatem augens. Vis resistentiae celeritatem minuit, aut tantum ab excessu $\frac{Pdy}{ds} - R$; hanc celeritatem

$$dv = Pdy - Rds.$$

Normalis vis $\frac{Pdx}{ds}$ vero officit, ut curva in M tantundem per directionem MN ad convexam curvae partem sitam. Quare vis normalis et tangentialis plerumque urgunt, quia est $= \frac{v^2}{r}$ designante

M , erit vis totalis, qua curva in M secundum MN premitur,

$$= \frac{Pdx}{ds} + \frac{2v}{r}.$$

Ado tum motus corporis super curva tum curvae pressio in singulis punctis notescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimens omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

SCHOLION 1

47. Hic quidam unicam potentiam absolutam posuimus; nihilominus non satis ex eo intelligitur, quomodo plurimum potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam singulas potentiae in binas, normalem nempe et tangentialem, sunt resolvendae, ex quibus colligendis una vis normalis unaque tangentialis oritur. Earum effectus per propositiones 3 et 4 determinari poterunt.

SCHOLION 2

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequenti motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem de motu super superficiobus datis similia principia tradamus, expedit, breviter ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deducitur. Namque ope canalis, in quo corpus continetur, talis motus minime produci poterit propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli nequeunt. Commodissimo autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur per aliorum opo, uti primum a HUGENIO factum est¹⁾; quamobrem hanc pondus ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione applicabimus.

1) CHR. HUGENIUS, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia apta demonstrationes geometricae*, Paris 1673; *Opera varia*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 89.

PROPOSITIO 6

PROBLEMA

49. *Ope penduli efficere, ut corpus in data linea moveatur.*

CONSTRUCTIO

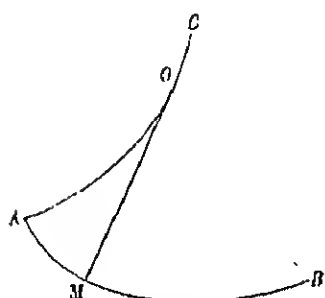


Fig. 5.

Sit AMB (Fig. 5) curva proposita, moveri debeat; huius curvae constructa AOC laminaque secundum eius figuram vetur et firmetur. Tum filum huic appendatur, quod altero termino ad A affixum, altero vero termino in M habeat corpus movendum. Quando moveri incipit, perspicuum est id in AMB moveri debere, quia filum, dum a A ratur, hanc curvam evolutione describit. Q. E. Fac.

COROLLARIUM 1

50. Hac igitur ratione corpus in data curva progreditur, quod non est obnoxium. Quare tali motu commodissimo per effectum effici poterunt, quae in theoria inveniuntur.

COROLLARIUM 2

51. Ex doctrina de evolutionibus intelligitur fili partem AM separatam in curvam AMB esse normalem ipsumque eius radii

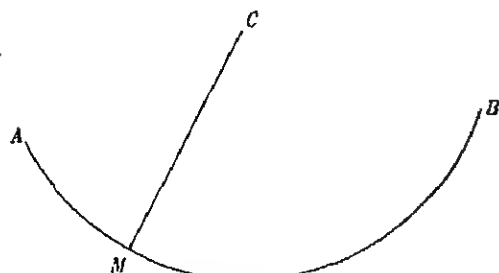


Fig. 6.

COROLLARIUM

52. Quo corpus in AMB (Fig. 6) movetur, incurvata non est opus. Altero termino C tantum centro C peripheriae es

COROLLARIUM 4

53. Quia filum MO (Fig. 5, p. 20) est radius osculi, vis centrifuga tendendum hoc filum impendetur. Quare hoc filum tam satis roboris habere quam extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpendicularitatem longitudinem conservet, curvam desideratam non describet.

COROLLARIUM 5

54. Accedente potentia absoluta habebitur praeter vim centrifugam vim normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspiciatur. At si contraria fuerit, minuet tensionem fili, imo etiam, si maior fuerit, comprimet, quo casu evolutio nullius erit usus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit neque ideo impedire, quo minus corpus a curva AMB versus evolutam recedat.

SCHOLION 1

55. Praeter hanc difficultatem ista curvarum per evolutiones generandi hoc quoque laborat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec evolutiones et curvas accommodari non potest, quae alicubi radius osculi habent incommensurabilem magnitudinem. Deinde etiam neque cuspidem neque flexum contrarium praeditas curvae hoc modo describi possunt. Quamobrem ista praxis locum tantum habet in curvis ubique finitam curvaturam habentibus, ad quod addi debet, ut per evolutionem curvae totalis nusquam in curvae concavam partem dirigatur.

SCHOLION 2

56. HUGENIUS, qui primus evolutionis doctrinam excoluit, statim eam ad hunc ipsum usum adhibuit, uti ex omni egregio opore de horologio oscillatorio apparet. Cum enim invenisset oscillationes super cycloide omnes esse isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis evolutio sit cyclois, hac ratione obtinuit, ut corpus filo annexum in cycloide moveretur.

SCHOLION 3

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari convenit prae-
 corpus motum filum quoque moveri debere, id quod ad institutum h
 ri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praet
 otus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis, c
 ntrum scilicet circuli curvam osculantis, qui motus pariter hoc loco
 tingitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat super linea vel su
 ie data examini subiiciemus mentemque tam a motu fili quam a m
 circulari abstrahemus. In sequentibus autem motum pendulorum, ubi
 otus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tan
 flucemus, ita ut haec, quo hoc libro tractabuntur, nihilominus in p
 um sint habitura. Quamobrem, ut iam monuimus, punctum motu
 mper parallelo super curva seu superficie sine ulla frictione ferri
 ncipiendum.

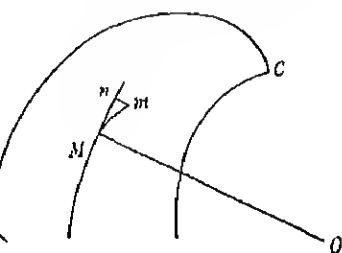
PROPOSITIO 7

THEOREMA

58. Si corpus a nullis potentiis sollicitum moveatur in vacuo seu n
 m resistente super superficie quacunque ABC (Fig. 7), motu feretur unif
 mum ab omni frictione abstrahendo.

DEMONSTRATIO

Cum corpus super linea data motum impressum continuare queat, in
 gis super superficie data moveri poterit, eo, quod eius libertas minus
 restricta. Sit igitur DMm linea, in qua co
 progreditur; haec erit vel recta vel curva.
 ista linea fuerit recta, dubium non est,
 corpus motu aequabili sit progressurum.
 autem fuerit curva, quo aequatione exp
 potest, duo quaequo eius olomonta contigua
 proxime in directum erunt sita vel angu
 infinite acutum constituunt, quod in cuspide
 accidit. Illo casu supra demonstratum est co
 rementum pati (§ 12). In cuspibus vero corpus qui



nnem motum amittet, nisi fuerit elasticum. Quamobrem, si motus tantum
at in curva vel parte curvae cuspidibus carente, motus corporis
equabilis. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem
mutare cogitur, hoc vero differentiali secundi gradus aequivalet ideoque
siamsi integretur, decrementum tamen infinite parvum producit.

COROLLARIUM 2

60. Si scilicet corporis celeritas fuerit c et radius osculi $MO = r$, celeritatis
decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit, $= \frac{c ds^2}{2r^2}$ (§ 15).

SCHOLIUM

61. Demonstratio huius propositionis prorsus congruit cum demonstratione
primae propositionis neque aliud est discrimen, nisi quod corpus
assu in data linea moveri cogatur, hoc vero casu super superficie data
perseverandae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae
primam propositionem sunt factae, hic quoque valent. Videmus igitur
eandem viam corpus in superficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8

THEOREMA

62. *Via DMm (Fig. 7, p. 22), quam corpus super superficie quacunque A
motum describit, est linea brevissima, quae inter terminos D et M duci potest
scilicet corpus in vacuo moveatur et a nullis potentiis sollicitetur.*

DEMONSTRATIO

Descripserit corpus iam curvam DM ; manifestum est corpus ex
angulo Mn esso progressurum, nisi in superficie perseverare
quia igitur motus per Mn fieri non potest, resolvatur in
duorum alter in ipsa superficie sit dispositus, alterius ver

ficiem sit perpendicularis atque ideo penitus non in effectum. Hanc ob rem ex n in superficiem demittatur perpendicularum Mm elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum quo posita sunt et elementum mM et id, quod a corpore in m est descriptum, erit normale in superficiem. At linea brevis in superficie ducta hanc habet proprietatem, ut planum, in quo posita sunt quaeque elementa contigua, sit in superficiem normale. Quia igitur DMm , quae a corpore describitur, est linea brevissima in superficie, Q. E. D.

COROLLARIUM 1

63. Si ergo ex puncto A , in quo motus incipit, linea in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebit corpus motu uniformi movebitur.

COROLLARIUM 2

64. Quia filum tensum in superficie lineam brevissimam describit, filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie movebitur.

COROLLARIUM 3

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus in ea describet, quia hoc in plano est linea brevissima. Atque si superficies sphaerica corpus in circulo maximo movebitur.

COROLLARIUM 4

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curvae DMm contigua, normale est in superficiem, radius osculi curvae vero in m sit positus et in curvam normalis, erit radius osculi curvae normalis in superficiem.

SCHOLIUM

67. Quemadmodum in quavis superficie linea brevissima a motu primo ostensum est in Tomo III Comment. Acad. Sci. Petrop. 3 (1735).

1) L. EULERI Commentatio 9 (indiciis ENESTROEMIANI): *De linea brevissima quaecunque duo quaelibet puncta iungente*, Comment. Acad. Sci. Petrop. 3 (1735). LEONHARDI EULERI Opera omnia, series I, vol. 25. P. St.

um autem ibi ex alio principio lineam brevissimam determinaverim atque
nec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam
brevissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare consti-

PROPOSITIO 9

PROBLEMA

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis
visibus sollicitatum, quod super ea movetur, describit.*

SOLUTIO

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio
planum APQ fixum (Fig. 8) in eoque recta AP pro axo. Tum ex quo
superficiei puncto M demittatur in hoc
planum perpendicularum MQ et ex Q in
axem AP perpendicularis QP . Positis
hinc $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$
natura superficiei dabitur per aequa-
tionem inter has tres variables x, y et z
constantes. Sit huius aequationis
differentialis

$$dz = Pdx + Qdy,$$

ex qua linea brevissima in hac super-
ficie seu linea, quam corpus describit,
determinari debet. Haec linea vero ex
hoc determinatur, quod eius radius
osculi in ipsam superficiei normalem
incidat. Quarebrom primo normalem
superficiei et deinde cuiusque in ea ductae curvae radius osculi determi-
nabimus, quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quae
describitur possit concludi.

Ad normalem in superficiem inveniendam socetur primo superficies plani
 MQB , existente BQ recta in plano APQ parallela axi AP , prodeatquo
hac sectione curva BM ; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = P$

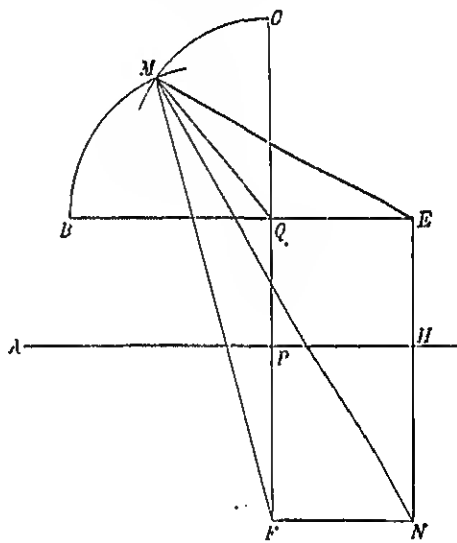


Fig. 8.

$$Pp = p\pi = dx, \quad pq = y + dy, \quad \pi q = y + 2dy + ddy, \quad Qq = V(dx^2 + dy^2)$$

$$q\varrho = V(dx^2 + dy^2) + \frac{dyddy}{V(dx^2 + dy^2)},$$

$$qm = z + dz, \quad q\mu = z + 2dz + ddz, \quad Mm = V(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$m\mu = V(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{dyddy + dzddz}{V(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

reducantur Qq et Mm utrinque, quarum illa ipsi πq in r , haec vero ipsi $m\mu$ normali in planum APQ in n occurrat, critque ob $Pp = p\pi$

$$qr = Qq \text{ et } mn = Mm \text{ atque } \pi r = y + 2dy \text{ ac } rn = z + 2dz.$$

nam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S ; erit

$$QS = \frac{(qm - QM)QM}{Qq} = \frac{zdz}{V(dx^2 + dy^2)}.$$

ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS omnes rectae ex m ductae normales erunt ad elementum Mm . In his igitur normalibus erit radius osculi curvae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quo in eo sita erit plane, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plane sunt elementa mn et $n\mu$; ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ . At nm vel mM occurrit plano APQ in T , ubi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur

$$QT = \frac{zV(dx^2 + dy^2)}{dz}.$$

posi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ orit sita; haec vero MV in plano APQ incidet in V dabiturquo QV ex analogia hac

$$(rn - q\mu) : r\varrho = QM : QV;$$

erit itaque

$$QV = \frac{zddy}{ddz}.$$

hanc ob rem recta TV producta orit intersectio plani $nm\mu$ cum plano APQ . Quare recta MR , quo in concursum rectarum SR et TV ost ducta, erit normalis in Mm et posita in plano $nm\mu$ oritque propterea MR p

sitio radii osculi curvae in M . Ex his punctum R hoc modo
bitur: erit, ducta RX perpendiculari in AP productam,

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

atque

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y.$$

Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curvae
incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; unde erit

$$\begin{aligned} &P(dx^2 + dy^2)ddz - Pdydzddy = dxdyddy + dxzddz \\ \text{et} \\ &- Q(dx^2 + dy^2)ddz + Qdydzddy = dx^2ddy + dz^2ddy - dzdy \end{aligned}$$

Quae quidem aequationes inter se congruunt; fit enim ex iis con

$$Pdx + Qdy = dz,$$

quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum ig
tionum alterutra cum hac $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta dubit
corpore in proposita superficie percursum. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

69. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta

$$ddz : ddy = Pdydz + dxdy : Pdx^2 + Pdy^2 - dxzdz.$$

At quia est $dz = Pdx + Qdy$, erit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

son

$$Pdyddz - Qdxdz = Pdzddy + dxddy.$$

COROLLARIUM 2

70. Si assumatur altera aequatio et utrinque subtrahatur

$$Qdz^2ddz - dy^2ddy,$$

habebitur

Ducta NR ex N in MR demittatur perpendicularum NO ; erit

$$MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx \cdot Nh + Qx \cdot Qh}{MR}$$

et

$$NO = \frac{\sqrt{(MR^2 \cdot MN^2 - (MQ^2 + Rx \cdot Nh + Qx \cdot Qh)^2)}}{MR}$$

$$= \frac{\sqrt{(MQ^2(Qx - Qh)^2 + MQ^2(Rx - Nh)^2 + (Rx \cdot Qh - Qx \cdot Nh)^2)}}{MR}$$

Anguli vero RMN tangens est $= \frac{NO}{MO}$ posito sinu toto =
autem supra assumtis symbolis et in subsidium vocata aequal

$$dz = Pdx + Qdy$$

prodit tangens anguli NMR

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

Hoc ergo angulo evanescente fit

$$ddz : ddy = Pdz + dx : Pdy - Qdx$$

ut supra (§ 69).

SCHOLION 2

72. Ipsa vero radii osculi longitudo MO (Fig. 9, p. 20) angulo $nm\mu$ ope huius analogiae: ut sinus anguli $nm\mu$ ad sinus Mm ad MO . Est vero

$$n\mu = \sqrt{(ddy^2 + ddz^2)} \quad \text{et} \quad mn - m\mu = \frac{-dyddy - dxdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

ergo perpendicularum ex n in $m\mu$ productum

$$= \frac{\sqrt{(dx^2ddy^2 + dz^2ddy^2 + dx^2ddz^2 + dy^2ddz^2 - 2dydzddy)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

Quare hoc perpendicularum est ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ ut MO ad MO , unde prodit radius osculi

$$MO = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}.$$

autem radio osculi opus erit in sequente propositione, in qua pressio, quam corpus in superficiem exercet, investigabimus.

SCHOLION 3

73. Ex hac generali radii osculi expressione oriatur ea pro radio osculi brevissimæ, si coniungatur cum hac æquatione

$$ddz = \frac{ddy(Pdx + dx)}{Pdy - Qdx} \quad \text{et locali} \quad dz = Pdx + Qdy.$$

erit autem radius osculi

$$\begin{aligned} &= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(Pdy - Qdx)}{dxddy\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{ddz - Qddy} \\ &= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{dPdx + dQdy}. \end{aligned}$$

hæc expressio dat radium osculi curvæ in superficie propositæ scriptæ a corpore a nullis potentiis sollicitato.

PROPOSITIO 10

THEOREMA

74. *Pressio, quam corpus in superficie motum et a nullis potentiis sollicitatum ipsam superficiem exercet, fit normaliter in eam versus eius convexitatem et secundum vim gravitatis ut altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radii curvæ a corpore descriptæ.*

DEMONSTRATIO

Sit DMm (Fig. 7, p. 22) curva in superficie ABC a corpore descripta, celeritati corporis debita $= v$ et radius osculi curvæ $MO = r$. Quia corpus ex M , si libero moveri possot, progrediretur in elemento Mn , super

ficies vero efficit, ut per elementum Mm incedat existens superficiem, superficies a corpore secundum directionem vi, quanta opus est ad corpus ex directione Mn in ducendum. Hoc vero praestatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in secundum directionem radii osculi MO agente. Quamobrem superficiem erit normalis, quippe agens secundum existentem vi gravitatis corporis $= 1$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

75. Haec est igitur vis centrifuga, quam corpus modo oxercet, quo in lineam datam, in qua moveri co-

SCHOLION 1

76. Pressio in superficiem necessario debet esse esset normalis, resolvi posset in duas, quarum altera in ipsa superficie posita. Harum vero normalis tantum superficiem impenditur, dum altera ipsum corporis motum i-

COROLLARIUM 2

77. Longitudinem radii osculi r lineae, quam co sollicitatum super proposita superficie describit, inveniri assumpta erit vis centrifuga

$$= \frac{2v(ddz - Qddy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} = \frac{2v(dPdx - Qdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

SCHOLION 2

78. De hac vi centrifuga in superficiem oxercita quo supra de vi centrifuga in datam curvam sunt § 20 cum annexis coroll. et schol. Linea enim brev super superficie percurrit, instar canalıs considerari moveatur, atque tum de motu in hoc canali omnia v motu super data linea nullis agentibus potentiis sunt

PROPOSITIO 11

PROBLEMA

79. *Determinare effectum cuiusvis potentiae, quem exerit in corpus super superficie motum tam in vacuo quam in medio resistente.*

SOLUTIO

Quaecumque sit directio potentiae sollicitantis corpus, ea resolvi potest in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimur M , directio normalis in superficiem, secundae, quam per N designabimus, directio normalis in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M , cuius est directio erit in plano tangente superficiem, tertiae potentiae T appropinquat directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis. Quae tres potentiae vero orunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones sunt inter se normales, nullius effectus a reliquis perturbari poterit. Quamvis effectum quaeque producat, investigabimus.

Prima potentia M , cuius directio in superficiem est normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu, sed tota impendetur in pressionem superficiem. Augebit igitur vel diminuet pressionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam convexae partis superficiem incidit vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem; erit tota pressio in superficiem versus partes exteriores

$$= \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}} - M$$

(§ 77). Pressio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc casu potentia M

Secunda potentia N , quia eius directio in ipsa superficie est posita normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutat, non toleritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a loco brevissima deducet facietque, ut non amplius in plano ad superficiem non moveatur; huius igitur plani, in quo corpus movebitur, inclinationem ad curvam lineam brevissimae normale in superficiem investigari oportet. Huius inclinationis angulus aequalis est angulus, quem radius osculi lineae descriptae cum normali in curvam constituit quemque ante generaliter de-

minavimus (§ 71). Postquam corpus elementum Mm color debita descripsit, progredieretur, nisi a vi N sollicitaretur

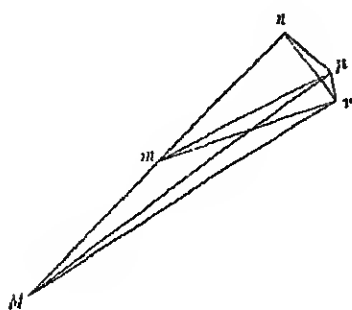


Fig. 11.

mv (Fig. 11) in v , ita ut Mm et mv duo elementa lineae brevissimi plano ad superficiem normali vis N normalis in planum $rv\mu$; corpus igitur hac vi sursum reducetur, si quidem vim N sursum esse directum torum positione, ut in figura Efficiat ergo haec vis, ut momentum $m\mu$ moveatur an

directione mv deflectat. Huic angulo respondet radius osculi cum vis N hunc angulum genere celeritasque curvae debitorit ex effectum virium normalium

$$N = \frac{2v \cdot \mu v}{m v^3} \quad \text{ideoque} \quad \mu v = \frac{N \cdot m v^3}{2v}$$

Quo nunc inclinatio plani $Mm\mu$, in quo corpus actu movetur Mmv , quod in superficiem est normale, inveniatur, demittamur Mm productum perpendicularum vn ; erit μn quoque perpendicularare ideoque angulus $\mu n v$ erit angulus inclinationis planum rmM ; atque cum μv sit normalis ad vn , huius erit $\frac{\mu v}{n v} = \frac{N \cdot m v^3}{2v \cdot n v}$. At $n v$ determinatur ex inclinatione et mv seu radio osculi lineae brevissimae, cuius Mm et m Sit hic radius osculi r , erit $\frac{mv^3}{n r} = r$ ideoque tangens anguli

$$= \frac{Nr}{2v} = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v(dPdx + dQdy)}$$

substituto loco r valore invento (§ 73). Huic vero angulo, quem radius osculi elementorum Mm , $m\mu$ a corpore constituit cum radio osculi elementorum Mm , mv seu superficiem. Huius autem anguli tangentem supra invenimus facta aequatione habebimus

$$\frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy) \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}{2v(dPdx + dQdy)}$$

na aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum sit

$$ddz - Qddy = dPdx + dQdy,$$

habebitur ista aequatio

$$ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx) = \frac{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{2v} \sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}.$$

Tertia potentia T , quia in directione corporis est posita, celoritatem augmentum vel augot vel diminuit. Ponamus eam esse acceleratorem, exprimetur effectus hac aequatione

$$dv = TV(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Atque si motus in medio fiat resistente resistantiaeque sit $= R$, minuetur augmentum est vis tangentialis T resistantia R . Quamobrem habebitur

$$dv = (T - R)V(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

E. I.

COROLLARIUM

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v , altera dv determinat, una conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro superficie $z = Pdx + Qdy$ coniuncta determinat curvam, quam corpus super proposita superficie describit.

SCHOLION 1

81. De potentia N bene est attendendum, in quam plagam tendit corpus, id est an ad dextram an ad sinistram regionem corporis moti vergat. Potentia enim differentia tangens anguli $\mu\nu$ vel affirmativa vel negativa accipienda. De hoc vero non erimus hic solliciti, sed ulteriorem huius inquisitionem in caput ultimum huius libri differemus.

SCHOLION 2

82. Ad sequens igitur caput secundum progredimur, in quo motus corporis super data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus super data linea in medio resistente investigabimus. Quarto denique caput motum super data superficie tam in vacuo quam in medio resistente tractabimus.

CAPUT SECUNDUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA I

PROPOSITIO 12

PROBLEMA

83. *Sollicitetur corpus, quod super curva AM (Fig. 12) in potentia MF , cuius directio sit parallela axi AP ; determinare eam in singulis punctis atque tempus, quo curvae quacvis portio depressio- nem, quam curva in singulis punctis patitur.*

SOLUTIO

Descripsit corpus iam arcum AM sitque eius celer
 altitudini b atque celeritas in M debita altitudini v . Posit.

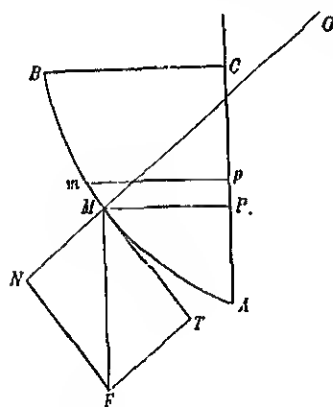


Fig. 12.

$PM=y$ et arcu $AM=s$ res
 MP , quæ sit p , in laterales, r
 MN et tangentialem MT ; erit

$$ds:dx = MF:MT \quad \text{et} \quad ds:dy =$$

Hinc igitur prodibit vis tangen-
et vis normalis $MN = \frac{p^2 dy}{ds}$. Po-
vim tangentialem celeritatem c
erit ergo

$$dv = -pdx \quad \text{atque} \quad v =$$

(§ 42). Sumto autem integrali $\int p dx$ ita, ut evanescat posit

$$v = b - \int p dx;$$

qua aequatione corporis celeritas in singulis punctis cognoscitur. Ex eadem aequatione innotescit quoque tempus, quo arcus AM absolvitur; posito enim tempore t erit

$$t = \int \frac{ds}{V(b - \int p dx)}.$$

is normalis $MN = \frac{p dy}{ds}$ tota impenditur in curvae pressionem secundum MN (§ 39), augebit ergo pressionem a vi contrifuga ortam, quia MN oppositam radii osculi MO plagam cadit. Quaro, cum posito radio osculi $MO = r$ vis contrifuga sit $= \frac{2v}{r}$ (§ 20), erit totalis pressio in curvam in $MN = \frac{p dy}{ds} + \frac{2v}{r}$. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

84. Celeritas in M igitur tanta est, quanta foret in P , si corpus eadem celeritate initiali Vb per AP eadem in singulis altitudinibus potentia p ascenderet ascendisset.

COROLLARIUM 2

85. Celeritas igitur non pendet a natura curvae, sed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit $dv = -p dx$ vel $dv = p dx$, prout corpus vel ascendit vel descendit.

COROLLARIUM 3

86. Cum sit $v = b - \int p dx$, si sumatur abscissa x tanta uti AC , qua sit $\int p dx = b$, erit corporis in illa altitudine B celeritas $= 0$. Corperis igitur in B usque ascendit ibique quiescit; continuo vero ex B descendit per BMA .

COROLLARIUM 4

87. Si asconsus per AMB cum ascensu rectilineo per APC comparatur erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp ut Mm ad Pp , i. o. ds ad dx .

COROLLARIUM 5

88. Quare si linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp constantem erit tempus per AM ad tempus per AP in constanti ratione, non alia, quam habet sinus totus ad cosinum anguli A , seu quam habet longitudo AB ad AC .

COROLLARIUM 6

89. Posito elemento Pp constante est radius osculi

$$r = \frac{-ds^3}{dx ddy}$$

deoque vis centrifuga

$$= -\frac{2v dx ddy}{ds^3} = -2(b - \int p dx) dx ddy / ds^3.$$

Quare pressio totalis erit

$$= \frac{p ds^2 dy}{ds^3} - 2(b - \int p dx) dx ddy / ds^3.$$

SCHOLION 1

90. Quomadmodum in hoc problemato ex datis curva et potentia sollicitantis inventa sunt coheritas in singulis punctis, tempus per quemvis arcum, et pressio in singula curvae puncta, ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis reliquae tres possunt inveniri. Ex quo decem nascuntur problemata, quae omnia solutionem ex huius problematis solutione habebunt.

SCHOLION 2

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaestiones, si directio potentiae sollicitantis non fuerint parallelae, sed vel convergentes ad centrum virium vel alio modo determinatas directiones habentes. At si etiam directio fuerit quaesita ponatur, tunc ob sex res in computum duendas ex totis quibusque reliquae tres invenientur; hincque viginti oriuntur problemata.

SCHOLION 3

92. Oriuntur porro problemata indeterminata, ut si loco temporis quaevis curvae portio tantum integrum tempus per AMB daretur; tunc

in infinitas solutiones locum haberent. Praeterea si plures descensus
 census integri considerentur super eiusdem curvae variis partibus cornu
 tio detur, numerus quaestionum multo magis augebitur. Ad hoc g
 rtinet quaestio de invenienda curva, super qua omnes descensus ad da
 nctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas ultimo pertractabi
 me autem primum curvam et potentiam sollicitantem tanquam datas
 piomus et problemata eo pertinentia solvamus. Deinceps vero ex aliis
 emadmodum reliqua sint invenienda, monstrabimus.

PROPOSITIO 13

PROBLEMA

93. Si potentia sollicitans fuerit uniformis et ubique deorsum tendat, d
 inare descensum corporis super data curva AM (Fig. 13) in A ex quiete
 pientem atque pressionem, quam curva in singulis punctis M sustinet.

SOLUTIO

Ducta verticali AP seu parallela directionibus potentiae MF atque
 icata rectangula MP sit $AP = x$, $PM = y$, curva $AM = s$. Ponatur
 ntia $MF = g$ existente vi gravitatis $= 1$ et coloritas
 M debita altitudini v . His positis orit vis normalis
 $\frac{gdy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{gdx}{ds}$ (§ 83). Quia hoc casu
 s tangentialis accolerat, orit $dv = gdx$ et

$$v = gx$$

o coloritatem in $A = 0$. Deinde quia radius osculi

MO directus ost $= \frac{+ds^3}{dxddy}$ posito dx constante,
 it vis centrifuga $= \frac{+2vdxddy}{ds^3}$, cuius directio est MN .

ecundum eandem plagam vero premit vis nor-

malis $\frac{gdy}{ds}$. Quare tota pressio, quam curva in M sustinet socum
 MN , est

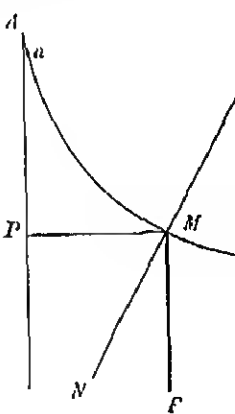


Fig. 13.

$$= \frac{gdy}{ds} + \frac{2x dx ddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2g x dx ddy}{ds^3}$$

ob $v = gx$. Tempus vero, quo corpus arcum AM percurrit
Q. E. I.

COROLLARIUM 1

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP , pendet atque tanta est, quantam idem corpus ex A in P eadem potentia g sollicitatum acquirit.

COROLLARIUM 2

95. In quacunque igitur curva corpus a potentia uniformi ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus proportionales; est enim celeritas ut \sqrt{v} , i. e. ut \sqrt{gx} .

COROLLARIUM 3

96. Tempus, quo primum elementum Aa percurritur, est finitum, si angulus PAa fuerit recte minor seu $s = \alpha x$. Si igitur angulus PAa fuerit recte minor seu $s = \alpha x$, per Aa infinito parvum ideoque tempus AM finitum, nisi curvæ inter A et M supra A vel in infinitum progrediatur. At si fuerit rectus, erit ipso puncto A $s^n = \alpha x$ existente n numero finito ideoque

$$\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2s^{\frac{2-n}{2}}}{2-n} \sqrt{\frac{\alpha}{g}}.$$

Quaro si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinito parvum, per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2 , tempus per primum elementum erit infinito magnum seu corpus ex A nunquam egredietur.

COROLLARIUM 4

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius osculi in A est finitum. Quare in casu, quo tangens curvæ in A ad AP est normalis, descendet, nisi radius osculi in A fuerit infinite parvus.

SCHOLIUM 1

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite parvo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM esse finitum; cum enim corpus in accelerato per AM descendat, multo celerius sequentia elementa describitur. Hanc ob rem tempus debet esse finitum. Exemplis autem sequentibus manifestum illustrabuntur.

EXEMPLUM 1

99. Sit linea AM (Fig. 14) recta utcumque inclinata ad verticalem. Si n sit cosinus ang. $A = n$; erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM descendit, erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g \cdot AP}}$$

id est tempus per lineam utcumque inclinatam est directe ad radicem ex ipsa linea et inverse ut radix ex cosinu anguli inclinationis MAP . Vis centrifuga erit autem $g \cos^2 \theta$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae est

$$= g\sqrt{1-n^2} = \frac{g \cdot PM}{AM}.$$

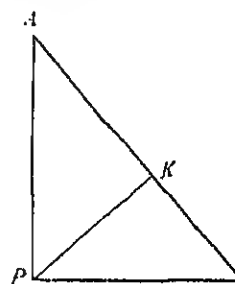


Fig. 14.

COROLLARIUM 5

100. Tempus ergo per AM est ad tempus per AK ut \sqrt{AM} ad \sqrt{AK} . Tempus per AM est ad tempus per AP ut AM ad AP (§ 88). Quare erit $AM:AP = \sqrt{AM}:\sqrt{AK}$ seu $AM:AP = AP:AK$, quod evenit, si AK sit in AM perpendicularis, tum tempus descensus per AK aequale est temporis descensus per AP .

COROLLARIUM 6

101. Patet etiam tempus descensus per perpendicularum PK aequale temporis descensus per AP . Est enim cosinus anguli $APK = \frac{PK}{AP}$. Quare si sit tempus per AP ad tempus per KP ut $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{PK}}$ ad $\sqrt{KP}:\sqrt{\frac{PK}{AP}}$, eadem ratio aequalitatis.

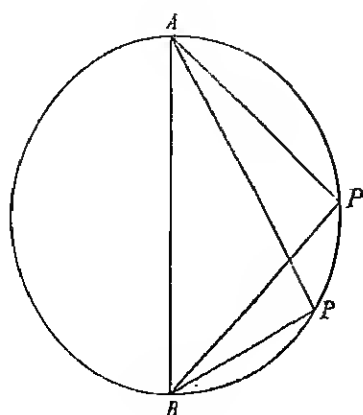


Fig. 15.

COROLLARIUM 7

102. Ex hoc perspicitur $APPB$ (Fig. 15) omnes chordas AP ex puncto superius A nec non omnes desconsurgunt ad punctum infimum B dari fieri temporibus, eo scilicet corpore per diametrum AB recte iter delabitur.

EXEMPLUM 2

103. Si curva AMB (Fig. 16) fuerit circulus ac radius tangat circulum, erit

$$(a - y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{seu} \quad y = a - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

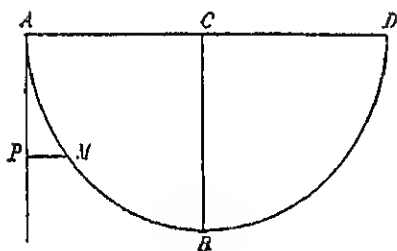


Fig. 16.

Habebitur ergo $ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ et $r = a$ erit vis contrifuga

$$= \frac{2gx}{a}$$

atque ob $dy = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ totus circulus in M sustinet,

$$= \frac{3gx}{a}.$$

Triplo igitur maior est tota pressio quam sola vis normalis.

Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

$$= \int \frac{adx}{\sqrt{g(a^2 x - x^3)}},$$

et a circuli nec hyperbolae quadratura per elasticam constitui potest. Tempus igitur

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \text{etc.}\right)$$

COROLLARIUM 8

4. Cum corpus ad infimum punctum B pervenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD etque ad D , ubi eius celeritas evanescet, ideoque rursus descendet ad quo ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui quadrantem, quia corpus, sive ascendant sive descendat, in iisdem punctis habet celeritatem.

SCHOLION 2

5. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, ubi plures descedat punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturum. Nunc vero primum eas quaestiones evolvimus, quae pertinent ad motum super data linea ex dato puncto fixo a quiete inceptum, cuius modi est haec sequens.

PROPOSITIO 14

PROBLEMA

6. Si fuerint infinitae curvae similes AM , AM etc. (Fig. 17) ex puncto initium sumentes, invenire curvam CM ab illis curvis arcus AM , AM etc. sumentes, qui a descendente super iis corpore aequalibus temporibus percurrante ut ante potentia sollicitante uniformi et ubique decorsum directu.

SOLUTIO

Si infinitis curvis datis sumatur una quaecumque AM , cuius parameter sit a . Positoque $PM = y$ et arcum $AM = s$ et existente potentia sollicitante $= g$ descendat corpus super curva AM ; erit celeritas in M debita altitudini yx . Tempus ergo descensus super AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}.$$

Quibus ergo curvis AM , AM etc. tanti arcus

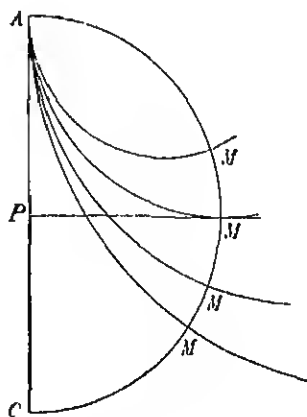


Fig. 17.

sunt abscindendi, ut pro iis sit $\int \frac{ds}{\sqrt{g}x}$ quantitas constans. At curvas referetur, si praeter s et x etiam parameter a ponatur. Posito igitur in $\int \frac{ds}{\sqrt{g}x}$ etiam a variabili quantitas $\int \frac{ds}{\sqrt{g}x}$ ponenda constanti, nempe oi tempori, quo omnes descensus fieri debent. $=k$, erit

$$k = \int \frac{ds}{\sqrt{g}x}$$

in singulis curvis. Quare si $\int \frac{ds}{\sqrt{g}x}$ ita differentietur, ut etiam natur, hoc differentiale nihilo aequale est ponendum. Ad hunc inveniendum sit $ds = p dx$ eritque p , quia omnes curvae per a funtio, in qua a et x nullum dimensionum numerum simul continentur, habemus ergo $\int \frac{p dx}{\sqrt{g}x}$; hoc differentiatum posito quoque a variabili

$$\frac{p dx}{\sqrt{g}x} + q da,$$

quod fieri debet $= 0$. Quantitas q vero sequenti modo invenitur $k = \int \frac{p dx}{\sqrt{g}x}$, in quantitate k variables a et x dimensionum substituent $\frac{1}{2}$. Ostendi autem alibi, in Tom. VII Comment.¹⁾,

$$\frac{p x}{\sqrt{g}x} + q a = \frac{k}{2}.$$

Ex quo invenitur

$$q = \frac{k}{2a} = \frac{p \sqrt{x}}{a \sqrt{g}}.$$

Habebitur ergo

$$\frac{p dx}{\sqrt{g}x} + q da = \frac{p dx}{\sqrt{g}x} + \frac{k da}{2a} - \frac{p da \sqrt{x}}{a \sqrt{g}} = 0,$$

1) Editio princeps: in Tom. IX Comment. Dissertatio autem communis Commentatio 44 (indicis ENESTROEMIANI): De infinitis curvis eiusdem generis veniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis, Comment. acad. sc. 1740; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series I, vol. 22. Legitur p. 185 (Tom. IX Comment.) „Sin vero fuerit a funtio m dimensionum ipsarum a et x atque $du = R dx + S da$,

EULERUS hanc dissertationem anno 1734 Academiae exhibuerat, et quae 1726—1729 Tomi I—IV Commentariorum editi erant (annis 1728—1735), composita ut pro anno 1734 Tomus IX oderetur; id quod non evenit, quia pro sex annis tantum Tomi V—VII editi sunt (annis 1738—1740). P. St.

aequatio pro curva quaesita. At si aequatio inter coordinatas x et y curva MM desideretur, ex aequatione pro quaque curvarum AM posius a in x et y inventus substitui debet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

7. Aequatio etiam primo inventa

$$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$$

ad curvam MM inveniendam. Nam pro quavis abscissa $AP = x$ invenitur a parameter eius curvae AM , cuius punctum M respondens abscissae x est in curva quaesita MM .

COROLLARIUM 2

8. Cum autem haec aequatio sit differentialis ideoque ad plures curvasistente, quae adicitur, pertineat, notandum est in additione constantis tantum solutioni esse convenientem, quae pro data curva seu pro dato x valore det abscissam x tantum arcum AM abscindentem, qui temporis descensu absolvatur.

COROLLARIUM 3

9. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem AC , erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

per integrationem id est faciendum, ut curva per punctum C transeat.

SCHOLION 1

10. Erit autem semper recta verticalis AC species curvarum AM ; quae si parameter a vel infinite magna vel infinito parva accipiatur. Quare dissimile tempus constans k per descensum per verticalem AC , quippe

speciem curvarum AM , exprimitur. Atque in constructione aequivalentae

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

tanta constans est addenda, ut posito $x=b$ fiat a vel infinitum prout illo vel iste valor ipsius a rectae AC respondeat.

SCHOLIUM 2

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione est, ad quam inveniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili, reipsa obtinebitur hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commode his casibus problema solvetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi aequale ponatur et loco a eius valor in x et y substituatur ex pro curvis datis. Atque hoc modo solutio in prompta est non curvis similibus, sed dissimilibus etiam, si modo tempora descensus finitatem finitas exprimi possunt.

EXEMPLUM 1

112. Si omnes hac curvae AM fuerint rectae diversimode ad AC inclinatae, erit

$$y = nx \quad \text{et} \quad s = x\sqrt{1+n^2},$$

ubi n tanquam parameter est consideranda. Erit ergo

$$\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}},$$

quod aequale poni debet ipsi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque

$$x(1+n^2) = b.$$

Cum autem n sit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex

quo facto prodibit pro curva CM aequatio inter coordinatas ortho-
 x et y ista

$$y^2 + x^2 = bx,$$

et pro circulo, cuius diameter est recta $AC = b$.

SCHOLION 3

3. Hic casus est ille ipse casus ante portractatus (§ 102); ibi enim
 n est corpus per omnes chordas in circulo ex puncto supremo eductas
 us temporibus descendere. Pertinet hic quidem casus non ad curvas
 sed hoc exemplum attulimus ad casum scholii 2 illustrandum, quia
 his hisce tempora descensus finitis quantitatis exprimuntur. Sequentia
 vero curvas similes, uti propositio postulat, complectentur.

EXEMPLUM 2

4. Sint curvae AM , AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A .
 radius cuiusque eorum $= a$, erit

$$y = a - \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{atque} \quad a = \frac{y^2 + x^2}{2y}.$$

5. Similes vero omnes sunt curvae, quia a , y et x in aequatione
 dimensionum numerum tenent sen homogeneitatem complent sola.
 igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem
 aequatione

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

erit

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

6. praescriptam habet proprietatem, ut a et x dimensionum numerus
 7. Hanc ob rem pro curva CM haec habebitur aequatio

$$\frac{adx}{\sqrt{a^2x - x^3}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$$

8.

$$\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{x da - a dx}{\sqrt{a^2x - x^3}}.$$

Quae aequatio construi potest; posito enim $x = au$ pro

$$\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u-u^3)}},$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae.
inter coordinatas x et y pro curva CM obtineantur,
 $\frac{y^2+x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy+2yx dx-x^2dy}{2y^2}$.
sequeus prodit aequatio differentialis

$$-x dy + y dx = \frac{(y^2 dy + 2yx dx - x^2 dy)}{y^2 + x^2} \sqrt{b}$$

Quae ita integrari debet, ut posito $x = b$ fiat $y = 0$, quin
transire debet.

COROLLARIUM 4

115. Ex hac aequatione tangens curvae CM in C
scitur et ex positione tangentis immotescit angulus AM
quolibet datarum intersecat. Erit scilicet tangens

$$= \frac{y}{x - \sqrt{bx}}.$$

Itic ergo angulus est rectus in C ob $x = b$, seu curva
est normalis.

COROLLARIUM 5

116. Si b vel maior vel minor accipiatur, curva
hocque modo infinitae orientur curvae a circulis ar-
dentes. Haecque curvae omnes inter se erunt similes
in aequatione cum x et y homogeneitatem constituit.
 CM innumerabiles aliae ex ea construi possunt, abs-
catis curvae CM in eadem ratione augendis vel di-
minuendis seu b augetur vel diminuitur.

EXEMPLUM 3

117. Sint curvae AM , AM omnes cycloides cuspidales
tangentes verticalem AC in A . Posita parametro c

diametro circuli generatoris = a erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{a^2 - 2ax}$$

$$ds = \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

$$dy = \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

casu est

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

arum a et x nullius dimensionis, ut requiritur. Quare pro curva eritur ista aequatio

$$\frac{a dx}{\sqrt{a^2 x - 2ax^2}} = \frac{da \sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - 2ax}} - \frac{da \sqrt{b}}{a}$$

$$\frac{x da - a dx}{\sqrt{a^2 x - 2ax^2}} = \frac{da \sqrt{b}}{a}$$

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y desideretur, ex aequa-

$$y = \int \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

differentiali posito quoque a variabili valor ipsius a debet sub-
ec vero aequatio differentiatia posito a quoque variabili dat

$$a dy - y da = \frac{a dx \sqrt{2ax} - x da \sqrt{2ax}}{\sqrt{a^2 - 2ax}}$$

$$\frac{a dy - y da}{\sqrt{2a}} = \frac{ax dx - x^2 da}{\sqrt{a^2 x - 2ax^2}}$$

in hanc

$$\frac{a dy - y da}{a^2 \sqrt{2}} = \frac{ax dx - x^2 da}{a^2 \sqrt{ax - 2x^2}}$$

ero por $\frac{1}{a \sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc

$$\frac{da \sqrt{b}}{a \sqrt{a}} = \frac{ax da - a^2 dx}{4a^2 \sqrt{ax - 2x^2}}$$

Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cui

$$\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{(ax-2x^2)}}{2a}.$$

Ex qua valor ipsius a erutus fit

$$\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x - 2bx^2 + 2x^3)}}{b-x}$$

et

$$\sqrt{(ax-2x^2)} = \frac{y\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x - 2b^2x^2 + 2bx^3)}}{b-x}.$$

Quibus valoribus in aequatione

$$\frac{(xdy - ydx)\sqrt{a} + xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax-2x^2)}} = dy\sqrt{b},$$

quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da , substitu

$$\frac{xdy - ydx - bdy}{\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2 - bx + x^2)}}{\sqrt{x}},$$

aequatio pro curva quaesita CMM.

COROLLARIUM 6

118. Ex hac aequatione invenitur tangens anguli, quem applicata PM constituit, nempe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}.$$

Deinde etiam innotescit tangens anguli, quem cyclois AM constituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt{2}}.$$

Eliminato vero a erit ista tangens

$$= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}.$$

Quare, cum horum angulorum alter alterius sit complementum sumto illius in principio positio, erit angulus, quem curva CMM cum qualibet datarum AM constituit, rectus. Consequenter curva CMM est trajectoria orthogonalem omnium cycloidum datarum AM , AM etc.

COROLLARIUM 7

119. Sumto AC alius magnitudinis aliae quoque curvae CMM propositae et sic infinitae trajectoriae orthogonales inveniuntur, quae omnes inter se sunt similes. Data ergo una facile, quotquot libuerit, construere licebit.

SCHOLION 4

120. Omnes hae curvae arcus abscindentes isochronos, quaecumque fuerint secundae, semper construi possunt, etiamsi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curvis arcus possunt abscindi, dato tempore desconsu absolvantur, hocque modo puncta quotlibet curvarum quasitae inveniuntur. Si quidem curvae secundae sunt algebraicae, aequatione pro curva secante semper ita est comparata, ut factis debitis substitutionibus indeterminatae a se invicem possint separari. At si curvae secundae differentiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curva secante rarissime separationem indeterminatarum admittit. Causa est, quod per alium modo, quo in hoc cycloidum casu usus sum, parameter a eliminari debet, cuius substitutio ad separationem non deducat.

SCHOLION 5

121. Deinde observandum est omnes curvas arcus isochronos abscindentes, quarum numerus pro vario ipsius b valore est infinitus, inter se similes esse, si quidem curvae secundae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione

$$\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a},$$

in qua, cum p sit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, quantitates a et x homogeneitatem constituunt. At ex aequatione curvarum secundarum patet, quia in ea a , x et y ubique eundem dimensionum numerum conficere possunt, valor ipsius a erit functio ipsarum x et y unius dimensionis. Quae

eo substituto loco a habebitur aequatio pro curva secante ubiq̃no eundem dimensionum numerum constituant. Causa posito oriuntur infinitae curvae similes inter se respectu ergo unica reliquae facile ex similitudinis ratione describi

SCHOLION 6

122. Materia haec de arcibus isochronis abscinderi saeculo est pertractata in Act. Erud. Lips. A. 1697 a C. Saurin, atque postmodum in Comment. Acad. Paris. a Cel. SAURIN methodo sunt usi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in pro A. 1734³⁾ tradidi, tanquam commodissimam ad huc solvenda. In his vero locis Viri Cel. curvas quoque similes consideraverunt, sine dubio, quia pro curvis dissimilibus difficilis et saepe etiam vires superat. Vocantur vero curvae synchronae, quia arcus simul percursi abscinduntur

SCHOLION 7

123. Ex mea dissertatione Tomi VII Comment. Acad. has curvas synchronas simili modo posse inveniri, si curvae fuerint similes, sed eiusmodi tamen, ut posito $ds = p dx$ et x datum dimensionum numerum constituent; tum enim literae g invenitur; ut si numerus dimensionum ipsarum n , aequatio pro curva secante reperietur haec

$$\frac{p dx}{\sqrt{x}} = \frac{p da \sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)da \sqrt{b}}{a}$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, ut si fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$$

1) ION. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus seu radiorum unda construenda*, Acta erud. 1697, p. 206; Opera omnia,

2) JOSEPH SAURIN (1653–1716), *Solution générale du problème, courbes semblables, décrites sur un plan vertical, et ayant un même axe* etc. il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine et un point est parcouru dans le plus court temps possible, Mém. de l'acad. d. sc. 1710, p. 208. P. St.

3) Vide notam p. 44. P. St. 4) Editio princeps: Tomi IX. V.

deoque $x = ma$, seu x in data ratione ad parametrum a est capiendum; cigitur casu constructio synchronarum est facillima. At si p non huiusmodi habuerit valorem, ex supra citata dissertatione mea intelligitur, quo modo equationem quaesitam sit inquirendum.

PROPOSITIO 15

PROBLEMA

124. Si fuerint ut ante infinitae curvae similes AM , AM etc. (Fig. 18) recta positione data DE , invenire eam curvam AMN , super qua corpus tempore brevissimo ex A ad rectam DE descensu pervenit.

SOLUTIO

Descripta per propositionem praecedentem quaecunque curva AMM arcus AM isochronos abscindendo ducatur tangens GHH parallela datae rectae DE . Manifestum est super curva AM , quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore brevissimo ad rectam GHH esse venturum, quia quaequo alia puncta rectae GHH extra curvam AMM cadunt ideoque longiore tempore opus est, quo corpus ad ea perveniat. Nam, quoniam omnes curvae a curvis AM , AM arcus isochronos abscindentes sunt inter se similes (§ 121), concipiatur ex iis una, quae rectam DE tangat; dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per primum punctum contactus M ducta rectae DE occurrat. Sequitur hoc tum ex natura similitudinis curvarum AMM respectu puncti A , tum etiam ex eo, quod arcus AMN similis sit arcui AM atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curva AM rectae GH . Quare, cum corpus per AM tempore brevissimo ad GH perveniat, necesse est, ut quoque tempore brevissimo super curva AMN ad rectam DE porveniat. Q. E. I.

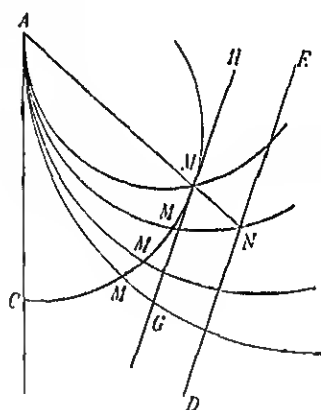


Fig. 18.

COROLLARIUM 1

125. Ex hoc perspicitur, si recta DE fuerit horizontalis, per verticalem AC ad eam citissime pervenire ob tangentem in C horizontalem; id quod quidem per se perspicuum est.

COROLLARIUM 2

126. Si ergo curvae AM , AM fuerint cycloides, ut in positionis praecedentis posuimus, corpus super ea cycloide color DE pervenit, quo hunc rectam in N ad angulos rectos occurrat quem quaeque cyclois cum curva CM constituit, est rectus.

COROLLARIUM 3

127. Si igitur recta DE fuerit parallela ipsi AC , portio cycloidis AM cyclois. Quare super dimidia cycloide horizontalis est celerrimus.

COROLLARIUM 4

128. Si curvae AM , AM sint in A ad rectam positionem datam DE super ea AM (Fig. 19) citissimo ad quo est chorda circuli per A transversa in verticali AB habentis atque rectae tangentis (§ 112).

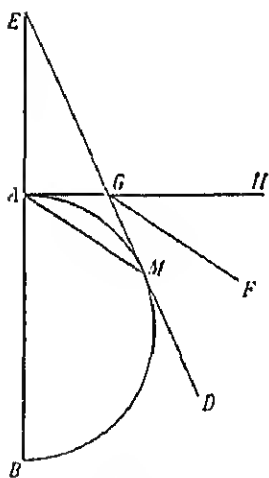


Fig. 19.

COROLLARIUM 5

129. Si igitur angulus DEA fuerit n graduum, erit $\frac{90+n}{2}$ graduum et angulus AMG graduum $\frac{90-n}{2}$. Si enim ducatur AC in H anguloquo DGH bisecto recta GF erit quaesita linea ipsi GF .

COROLLARIUM 6

130. Quare si linea DE fuerit verticalis, corpus ad eam citissime perveniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerissimo progreditur.

SCHOLION

131. Simili modo quoque inveniri potest, super quamcumque infinitarum curvarum similium AM , Am (Fig. 18, p. 53) corpus descensu citissime ad datam curvam perveniat. Nam si linea GMI fuerit curva quaecumque tangens curvam CMM in M , corpus super hac curva AM celerrimo ad curvam MI perveniet, si quidem tota curva GMI extra curvam CMM fuerit. Eodem etiam modo posset determinari, si curvae AM , Am non fuerint similes, super quamcumque corpus celerrime ad datam lineam GH perveniat. In finitis enim curvis CMM arcus isochronos abscidentibus ea est quaerenda data GMI tangat, eritque ea curva AM , quae per punctum contactus transit, ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curvas CMM invenire multoque difficilius eam determinare, quae datam tangat, quaestionem ad curvas similes tantum restrinximus.

PROPOSITIO 16

THEOREMA

132. Tempora descensuum, quibus corpus curvas AM et Am (Fig. 20, p. 54) similes similiterque ex puncto A positas percurrit, sunt in ratione subduplicata laterum homologorum.

DEMONSTRATIO

Quia curvae AM , Am sunt similes, erunt $AM:Am$, $AP:Ap$, $PM:pm$ in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; ratio laterum homologorum $N:n$. Quia celeritas in M est ad celeritatem in m ut \sqrt{AP} ad \sqrt{Ap} , erunt celeritates in M et m in ratione subduplicata laterum homologorum. Sumantur iam ex M et m elementa similia, ratione scilicet N ad n tonentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur, in ratione composita ex directa elementorum, i. e. N ad n ,

reciproca celeritatum, i. e. $VN:Vn$. Ex quo sequitur temporum AM , Am elementa homologa percurruntur, esse in ratio-

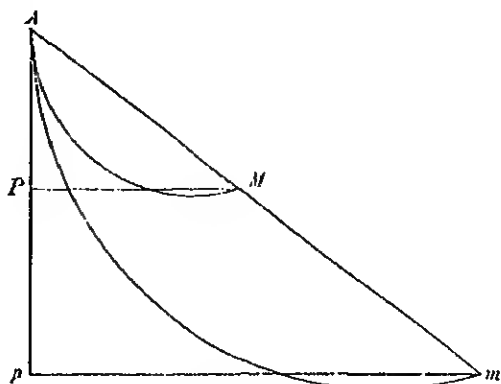


Fig. 20.

laterum homologorum. Quare, cum haec ratio sit constans, totae curvae AM et Am percurruntur, eandem hanc rationem te-

COROLLARIUM 1

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares similes sinu descensu percurruntur, sunt in subduplicata ratione radiorum.

COROLLARIUM 2

134. Pendula igitur, quae arcus circulares similes describunt absolvunt temporibus, quae rationem subduplicatam longitudinum tenebunt.

COROLLARIUM 3

135. Eadem ratio temporum locum habet, si corpora per curvos describant, sed alias curvas, dummodo eae fuerint inter se similes, ut arcus absolvantur.

SCHOLION

136. In his autem omnibus potentiam sollicitantem se habet uniformem deorsumque tendentem, etiamsi hanc conditionem non habent. Hanc enim hypothesein ante pertractare constituimus, quam a posteriori progressuri.

PROPOSITIO 17

PROBLEMA

37. *Existente potentia sollicitante uniformi tendenteque deorsum moveatur super curva quacunque AM (Fig. 21) cum data celeritate initiali in A ; inare motum corporis super hac curva et pressionem, quam curva in singulis s sustinet.*

SOLUTIO

osita potentia sollicitante g et celeritate initiali in A debita altitudini $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et celeritate in M debita altitudini $PM = y$, his positis erit $dv = gdx$ (§ 93), unde fit $v = \sqrt{b + gx}$. Porroque tempus per arcum AM erit $t = \int \frac{ds}{v}$. Deinde pressio totalis, quam sustinet corpus, secundum directionem normalis MN , erit (§ 93)

$$P = \frac{gdy}{ds} + \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{gdy}{ds} + \frac{2(b + gx)dxddy}{ds^3}$$

propter dx elemento constante. Hoc enim tantum

hanc solutio a solutione propositionis 13,

ubi esset $v = gx$, hic vero sit $v = b + gx$.

igitur formulis tum motus tum pressio cognoscitur. Q. E. I.

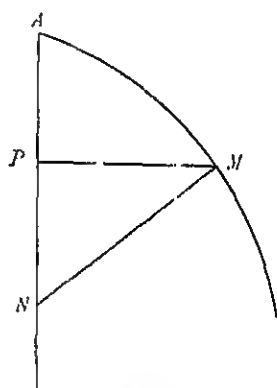


Fig. 21.

COROLLARIUM 1

38. Si linea AM fuerit recta, iam ex § 88 intelligitur tempus per AM et tempus descensus per AP eadem celeritate \sqrt{b} incepti, ut est AM ad AP ut quadratum AM ad quadratum AP . Pressio vero ob evanescentem vim centrifugam erit $= \frac{gdy}{ds}$ seu constans.

COROLLARIUM 2

39. Patet etiam hoc casu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem tantum pendere. Quare, quacunque fuerit curva AM , celeritas in quovis eius puncto innotescit, etiam incognita curvae natura.

EXEMPLUM 1

140. Sit curva AM parabola verticem in A et a habens; erit ergo posita eius parametro $= a$

$$y^2 = ax$$

et

$$dy = \frac{a dx}{2 \sqrt{ax}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx \sqrt{a^2 + 4ax}}{2 \sqrt{ax}}$$

Habebitur ergo tempus per AM

$$= \int \frac{dx \sqrt{a + 4x}}{2 \sqrt{x(b + gx)}}$$

Deinde, cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-a dx^2}{4x \sqrt{ax}}$, erit

$$\frac{dx ddy}{ds^3} = \frac{-2a}{(a + 4x) \sqrt{(a^2 + 4ax)}}$$

Consequenter pressio totalis est

$$= \frac{ga}{\sqrt{(a^2 + 4ax)}} - \frac{4a(b + gx)}{(a + 4x) \sqrt{(a^2 + 4ax)}} = \frac{ga^2}{(a + 4x) \sqrt{(a^2 + 4ax)}}$$

COROLLARIUM 3

141. Si igitur est $b = \frac{ga^2}{4}$, pressio curvae evanescit casu libero in hac parabola moveri posset, qui est obiecto dente libro [§ 564] tractatus.

COROLLARIUM 4

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4} ga$ erit tempus per arcum

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2 \sqrt{x}}{\sqrt{g}}$$

Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per absinthii incepti.

COROLLARIUM 5

43. Si $b > \frac{1}{4}ga$, pressio fit negativa; tum igitur curva in plagam axi oppositam premitur. At si $b < \frac{1}{4}ga$, directio pressionis erit in MN . Velocitas vero pressionis in singulis curvae punctis erit reciproce ut radius

EXEMPLUM 2

44. Si curva AM fuerit circulus, cuius radius $= a$ et centrum in tali AP sit positum, erit

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

$$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

ergo tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}$$

cum sit

$$\frac{dx dy}{ds^3} = -\frac{1}{a}.$$

pressio, quam circulus in puncto M patitur,

$$= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b + gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}.$$

COROLLARIUM 6

45. Tempus per logarithmos exprimi potest, si fuerit $b = 0$; fit autem seu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per supra tradita (§ 97)

Nam quia curva in A est normalis in AP neque radius osculi eo parvus, corpus descendere non potest.

COROLLARIUM 7

46. Si est $b = \frac{ga}{2}$ seu velocitas initialis tanta, quantam corpus acquirit ex altitudine dimidii radii circuli, pressio totalis cum vi contrifuga conspirans atque $= \frac{3gx}{a}$; erit itaque altitudinē percursae proportionalis.

DEFINITIO 3

147. *Motus oscillatorius est motus reciprocus, quo corpus recedit ab initio motus M (Fig. 22). Ita si corpus super ea primo descendet super MA , tum ascendet in AN , donec*

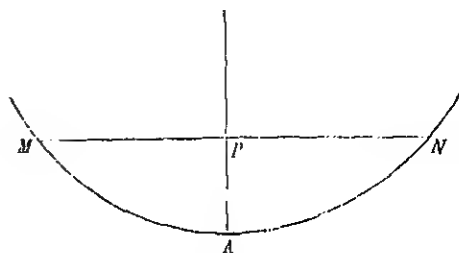


Fig. 22.

deinde ex N iterum descendet ascendetque in arcu AM , quo hancque periodum continuabit. Atque talis motus oscillatorius

COROLLARIUM 1

148. *Motus oscillatorius ergo consistit in alternis descensibus super linea curva; atque descensu motu accelerato, vero celeritatem acquisitam rursus perdit.*

COROLLARIUM 2

149. *Quilibet ergo descensus super eadem curvâ præcedens ascensus contigit. Quare, cum celeritas constantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curvæ puncto sive in descensu eandem habet celeritatem.*

COROLLARIUM 3

150. *Ex quo sequitur tempus descensus per MA æquale tempus ascensus per AM similique modo tempus ascensus per AN æquale tempus descensus per NA .*

COROLLARIUM 4

151. Corpus in arcu AN ascendens ad punctum N usque pervenit ad aequale altum est ac punctum M , ex quo erat delapsum. Sequitur hoc, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

COROLLARIUM 5

152. Si curva AN similis et aequalis fuerit curvae AM , tum motus per AN aequalis erit motui per AM . Quare omnes ascensus et descensus aequalibus fient temporibus.

COROLLARIUM 6

153. Si curvae MA , AN fuerint dissimiles, tempus saltem per MA aequale erit tempori per NAM , seu tempora accessionum et recessionum sunt inter se aequalia.

COROLLARIUM 7

154. Quia corpus semper ad eandem altitudinem pertinget, manifestum est hunc motum oscillatorium perpetuo durare debere.

COROLLARIUM 8

155. Curva ergo ad motum oscillatorium producendum apta est omnis curva, quae a puncto infimo A duos habet arcus ascendentes, ut MAN .

SCHOLION 1

156. Exposuimus hic proprietates motus oscillatorii, quales ex expositione hypothese potentiae sollicitantis uniformis et perpetuo deorsum tendentis consequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, si potentia utcumque altitudine pendeat vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in sequentibus plenius apparebit. In medio resistente vero res aliter se habet; namque ascensus per datam curvam similis est descensui per eandem, nec per ascensum corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua descendit delapsum.

SCHOLION 2

157. Vocari solet motus per MAN itus, sequens vero motus reditus; consistit ergo motus oscillatorius ex alternis itibus. Oscillatio vero ab aliis vocatur motus ex ita et reditu constans, itus quam reditus oscillatio vocatur. Hic priori sensu oscillatio accipiemus, ita ut una oscillatio ex uno ita unoque reditu constet, vero atque reditus uterque uno ascensu unoquo descensu constet, ideo integra oscillatio duos ascensus duosque descensus complectitur, igitur tempus itus aequale sit reditus temporis, erit tempus unius duplo maius quam tempus unius itus seu reditus.

COROLLARIUM 9

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, oscillatorium examinare velimus, vel ascensus vel descensus duabus curvae partibus AM , AN considerare opus habebimus.

SCHOLION 3

159. Nihil refert, utrum arcus AM et AN unam curvam constituent, an vero sint diversae curvae, dummodo in A ita sint, ut communem habeant tangentem; alias enim motus perturbatur ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, ut motus AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad determinandas tum ad relationem inter maiores minoresque inveniendam. Vocantur autem hae oscillationes maiores, quae arcibus absolvuntur, minores vero, quae minoribus.

SCHOLION 4

160. Ex propositione 6 (§ 49) perspicitur, quomodo oscillationes pendulorum effici queant, scilicet ope evolutae curvae AM et AN , quas filum circumducitur. Ab HUGENIO etiam isto pendulorum oscillationes accommodatur, ut vel ex eius instituto, quo ea methodologia perficienda utitur, apparet. Eaedem vero difficultates, quae commemoravimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti in lineis hic tantum investigabimus mentemque ab omnibus pendulorum stantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possunt.

PROPOSITIO 18

PROBLEMA

Existente potentia sollicitante uniformi et deorsum directa determinare ascensus seu descensus per quemvis circuli arcum EA (Fig. 23) in puncto A terminatum.

SOLUTIO

circuli centrum, erit CA radius verticalis seu parallelus directioni g . Ponatur $AC = a$ et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas puncto A debita altitudini gb , quia corpus ex E descendens tantam celeritatem, cum in A per-

Atque tantam celeritatem A habere debet, ut ad E ascendere possit. Consideretur arcus AE elementum Mm et $PM = x$; erit

$$PM = \sqrt{(2ax - x^2)}$$

$$Mm = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

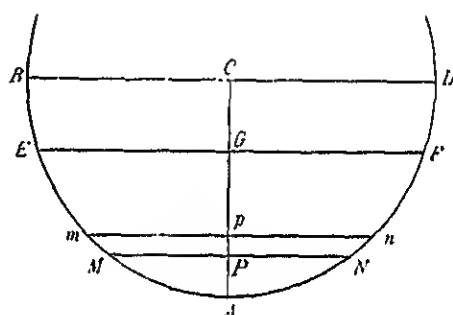


Fig. 23.

ore in M erit debita altitudini $g \cdot GP = gb - gx$ (§ 93). Tempus per elementum Mm sive ascensu sive descensu percurritur, erit

$$= \frac{adx}{\sqrt{g(b-x)(2ax-x^2)}}$$

integrari non potest, per series eius integrale exprimemus. Est dato $2a = c$

$$\frac{1}{(b-x)(2ax-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \left\{ x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2c^2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.} \right\}$$

per $\frac{adx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM

absolvitur,

$$= \frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{g}b} \left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} + \text{etc.} \right)$$

Totum vero tempus per arcum EA prodibit, si sint $x = b$ et ratio ad diametrum $= \pi : 1$, quo posito habebitur¹⁾

$$\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.} \right) = \frac{\pi \sqrt{2}a}{2\sqrt{g}} \left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.} \right)$$

Ubi coefficientes $1, \frac{1}{4}, \frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ etc. deunt, si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resolvitur. Ex hac igitur serie tempus proxime potest inveniri. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit is percurritur. Fit enim posito $b = 2a = c$ tempus infinitum, descensu semicirculum nequaquam describere potest.

COROLLARIUM 2

163. Si igitur corpus oscillatorio motu movetur in arcu cuius longitudo ANF erit tempus unius itus vel reditus duplo maius quam tempus unius itus vel reditus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AE unius itus reditusve tempus seu tempus dimidia oscillationis erit

$$= \frac{\pi \sqrt{2}a}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.} \right).$$

Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absolvetur.

SCHOLION 1

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest. Temporis elementum in hos factores resolvatur

$$\frac{adx}{\sqrt{g(bx - xx)}} \propto \frac{1}{\sqrt{(2a - x)}}$$

1) Vide scholion 1. P. St.

posterior tantum in seriem commutetur, scilicet hanc

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1 \cdot x}{2 \cdot c \sqrt{c}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} + \text{etc.}$$

$x = c$. Quia autem post integrationem fit $x = b$, erit

$$\frac{dx}{(bx - x^2)} = \pi, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot \pi b}{2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \pi b^2}{2 \cdot 4},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi b^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{ etc.}$$

totum descensus tempus ut ante colligitur

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2 \sqrt{g}} \left(1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \frac{225b^3}{2304c^3} + \text{etc.} \right).$$

SCHOLIUM 2

Quo apparet, a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei

$$1 + \frac{1b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}$$

pono

$$\frac{b}{c} = \frac{tt}{1 + tt}$$

in seriei

$$= e^{\int \frac{q dt}{1}}$$

e numerum, cuius log. est = 1. His positis ex mea series sum-
thodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII exposita¹⁾ invenitur
aequatio

$$dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{t dt}{(1 + tt)^2}.$$

aequationo, si construi posset, invenirotur q in t indeque ipsa summa
per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit, in se

EULERI Commentatio 41 (indiciis FENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum*,
Acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*,
14. P. St.

EULERI *Opera omnia* II 2 *Mechanica*

spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempus in circulo ope quadratarum assignari potest. Data enim summa seriei ea constructio aequationis inventae sequitur.

COROLLARIUM 3

166. Si arcus AE , in quo descensus vel ascensus absolvitur, ponitur infinite parvus, tempus per eum tamen non fit infinite parvum. Evanescent enim in expressione temporis tantum b eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE evanescentem

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 4

167. Insecta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EA evanescentem fiunt infinite parvae; tempore tamen absolventur finito. Scilicet tempus unius itus vel reditus seu tempus unius dimidiaae oscillationis erit

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

COROLLARIUM 5

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite parvarum sunt ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

COROLLARIUM 6

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit uniformis. Nam utcumque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinitum parvo motum agit, constantem habebit valorem.

COROLLARIUM 7

170. Intelligitur, etiamsi curva EA non fuerit circulus, sed curva quaecunque, tum etiam, quae hic allata sunt, ad oscillationes infinite parvas super hac curva pertinere. Tum vero loco radii a radius osculi huius curvae puncto infimo A est accipiendus.

COROLLARIUM 8

1. Huismodi oscillationes super aren infinite parvo EAF efficiuntur penduli, cuius longitudo est radius AC . Tempora igitur oscillationum parvarum pendulorum sunt directe ut radix quadrata ex longitudo et reciproce ut radix quadrata ex potentia sollicitante.

COROLLARIUM 9

2. Si curva ANP non fuerit aequalis curvae AME , pro oscillationibus parvis radium osculi in A tantum considerare sufficit. Sit is $= \alpha$, tempus ascensus per arcum AP infinite parvum $= \frac{\pi \sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$, atque cum descensus per arcum EMA evanescentem sit $\frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, erit tempus unius dimidia oscillationis super curva composita EAP

$$= \frac{\pi(\sqrt{a} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}.$$

COROLLARIUM 10

3. Si oscillationes non fuerint infinite parvae super circulo BAD , oscillationum maiora erunt, quo maiores sint oscillationum arcus. Si oscillationes tamen sint valde parvae, erit tempus talis oscillationis tempus oscillationis infinite parvae ut quadruplum diametri circuli sinu arcus percursi auctum ad quadruplum diametri ipsum.

COROLLARIUM 11

4. Altitudo, ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g sollicitum descendit, quo sit descensus per arcum EMA infinite parvum, est seu est ad octavam radii partem ut quadratum peripheriae circuli ad eundem diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4} a$.

COROLLARIUM 12

5. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, ut diametrum circuli (§ 102). Quare tempus descensus super chorda in-

finite parva est ad tempus descensus super arcu respondente ut $\frac{\pi^2 a}{21g}$, i. e. ut diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus unius oscillationis infinite parvae ex itu et reditu compositae ut diameter ad peripheriam.

SCHOLION 3

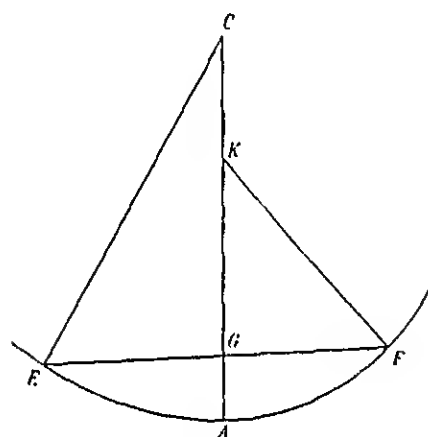


Fig. 24.

176. Si duo arcus circularis EA et FA (Fig. 24), super quibus inaequalibus oscillationes peraguntur sunt aequales, opo penduli hanc oscillationes confici possunt, si in centro arcus AF clavus infigatur, ut CA , postquam arcum EA circum centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat.

PROPOSITIO 19

PROBLEMA

177. *Data potentia sollicitante invenire longitudinem penduli infinite oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusve uno minuto secundo*

SOLUTIO

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, vim gravitatis denotante, est tempus unius dimidio oscillationis parvae $= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haece vero expressio ut in minutis secundis habeatur a in partibus millesimis pedis Rhonani est exprimenda et $\frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 dividenda, ut ex primo libro [§ 221] apparet. Quae

debetur tempus unius dimidiaë oscillationis

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}} \text{ min. sec.}$$

quare, cum hoc tempus unum minutum secundum esso debeat, erit

$$\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$$

quo

$$a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166 \frac{1}{4} g \text{ part. mill. pedis Rhon.}$$

hec ergo est longitudo penduli semioscillationes uno minuto secundo absolvantis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragunt, sed a diversis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

COROLLARIUM 2

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi gravitatis 1, qui casus oscillationes in superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quae unum minutum secundum absolvit,

$$= 3,16625 \text{ pedum Rhen.}$$

id est trium pedum cum sexta pedis parte.

SCHOLION 1

180. Apprime convenit haec longitudo cum ea, quam HUGENIUS per experimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro [§ 220] numerum 3,16625 scrup. pedis Rhenani recte pro altitudine, ex qua corpus vi gravitatis sollicitatum tempore unius minuti secundi delabitur, assumpsisse; ex hoc enim numero fuit numerus 250, per quem temporum expressiones dividi debent, ut minuta secunda praebeant. Cum igitur HUGENIUS longitudinis 3,166 partem tertiam pro pede universali haberi velit, quippe cuius longitudo ubique terrarum per observationes potest determinari, continebit hic pes universalis 3166,25 partes millesimas pedis Rhenani.

SCHOLION 2

181. Observationibus vero hic pes universalis sequenti modo commodissime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f , quod ad minimas oscillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidia oscillationes tempore unius horae earumque numerus sit n , ita ut una semioscillatio absolvatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. sec. Sit iam longitudo penduli semioscillatione minutis secundis absolventis z . Quare, cum tempora oscillationum diversorum pendulorum ab eadem potentia sollicitatorum sint in subduplicata ratione pendulorum (§ 171), erit

$$\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$$

ideoque

$$z = \frac{n^2 f}{12960000}$$

et consequenter pes universalis

$$= \frac{n^2 f}{38880000}$$

COROLLARIUM 3

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166 \frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhodani semioscillationes duobus minutis secundis absolvet, quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

COROLLARIUM 4

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. lichen., si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius una semioscillatio 2536 min. sec. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absolvet.

COROLLARIUM 5

185.¹⁾ Quia tempus dimidia oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integre oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus revolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractao, quod ad centrum circum-

1) Editio princeps falso omittit numerum 184.

vi = g , ut ex praecedente libro (§ 612) apparet. Hanc ob rem tempus oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequalur π , quo corpus proiectum in superficie terrae unam revolutionem peragat. Ostendit vero quoque HUYGENS corpus hoc modo motum tempore 24 h. fere 17 revolutiones esse absoluturum.

COROLLARIUM 6

6. Cum vis gravitatis sit ad vim, quae corpus in superficie solis ad in eodem argetur, ut 41 ad 1000⁴), erit longitudo penduli, quod in superficie semioscillationes minuto secundo absolvit, = 77,326 ped. Rheman. modo de gravitatem in superficie Iovis = $\frac{107}{93}$ tale pendulum longum = 18 ped. Atque in superficie Saturni de gravitatem = $\frac{106}{93}$ talis penduli ab erit 4,651 ped.

PROPOSITIO 20

PROBLEMA

20. Si fuerit curva BAD (Fig. 26), super qua fiunt oscillationes, cyclois diametri AC super base horizontali BD descripto, determinare tempus per quomque arcum EAP existente potentia sollicitante uniformi et ∞ tendente.

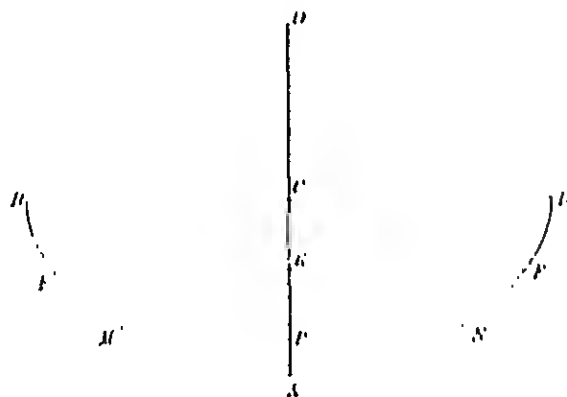


Fig. 26

SOLUTIO

Et radius osculi in A , nempe AQ , = a , qui est duplum diametri circuli toris AC ; erit ergo AC = $\frac{1}{2}a$ ut posita abscissa AP = x et arcu re-

) Editio princeps: ut 1000 ad 41

) Correkt P. St.

spondente $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s^2 = 2ax.$$

Sit iam abscissa arcui EAF , qui motu oscillatorio percurritur $AG = b$; erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb M debita altitudini $g(b-x)$. Quare, cum sit

$$ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}},$$

erit tempus, quo arcus AM percurritur,

$$= \int \frac{dx \sqrt{2a}}{2\sqrt{g(bx-x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}.$$

Est vero, si post integrationem ponatur $x = b$, quo tempus per AE prodeat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \pi$$

sive peripheria circuli per diametrum divisa. Quare tempus vel descensus est

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$$

et tempus unius itus vel reditus per arcum EAF erit

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Atque tempus unius integrae oscillationis erit

$$= \frac{2\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

188. Quia in hanc temporis expressionem littera b , quae arcum EAF determinat, non ingreditur, omnium oscillationum super eadem cycloide perficiuntur, sunt inter se aequalia.

COROLLARIUM 2

189. Tempus ergo uniuscuiusque oscillationis erit aequale tempori oscillationis per arcum infinito parvum. At arcus infinite parvus congruus est arculo circuli radio OA descripti. Quare tempus cuiusque oscillationis per cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oscillationem minimam absolvit. Id quod etiam ex praecedente propositione patet; tempus enim minimae oscillationis penduli a est $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (§ 167), eadem formula tempus unius oscillationis integrae super cycloide expressit. Q. E. D.

COROLLARIUM 3

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, ut corpus oscillans in cycloide moveatur, omnes eius oscillationes, sive fuerint magnae sive parvae, aequales absolventur temporibus. Quare si AO fuerit $= 3166 \frac{1}{4} g$ scrup. pendulum, singulae oscillationes minuto secundo absolventur.

COROLLARIUM 4

191. Omnes igitur descensus super cycloide ad punctum infimum A sunt aequitemporanei seu isochroni, item omnes ascensus ex puncto infimo eodem celeritas fuerit absunta. Tempus vero unius ascensus vel descensus est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

SCHOLION 1

192. Propter hanc proprietatem cyclois tantochronae nemino appollet, quia omnes oscillationes super ea eodem tempore absolventur. HUGERIVS hanc oximiam cycloidis proprietatem detexit statimquo cogitavit cycloide in locum circuli substituenda in oscillationibus, id quod in horologio fecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oscillandi modum reservaverunt, quod eius usum nimis exiguum compererint. Atquo certe vacuo quaelibet curva oscillationes isochronas producit, quia perpetuo eius magnitudinis existant. In medio resistente vero, quo oscillationes decrescunt, cyclois hanc proprietatem amittit ideoque nullius est utilitatis.

SCHOLION 2

193. Intelligitur etiam, si duae cycloides AE et AF dissimiles in punctis infimis iungantur, oscillationes super EA et FA aequalibus temporibus absolvi. Nam cum super utroque ascensus vel descensus sint constantis quantitatis, etiam semper tempora semioscillationum et integrarum oscillationum erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidis AE erit tempus unius ascensus vel descensus super $AF = \frac{\pi V^2}{2Vg}$ reditusque super curva composita EAF absolvetur tempore $\frac{2\pi(V^2a + V^2a)}{Vg}$.
 integra vero oscillatio tempore $= \frac{2\pi(V^2a + V^2a)}{Vg}$.

SCHOLION 3

194. Ordo requireret, ut, antequam ad alias potentiae actiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones sint ad se invicem sed variables, ovolveremus motumque corporis a huiusmodi potentia super data curva investigaremus. Sed cum exempla motum continentia nobis adhuc lateant atque principia, quorum opem quaque curva cognoscitur, iam sint exposita, pleniorum tractationem foremus, ubi curvas sumus investigaturi, super quibus corporis potentia sollicitatum data lego incedat.

PROPOSITIO 21

PROBLEMA

195. Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum C trahatur atque super data curva AM moveatur, determinare motum super hac linea et pressionem, quam curva in singulis punctis sustinet.

SOLUTIO

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b ex centro C distantia $AC = a$. Celeritas vero corporis in quocunque puncto M sit v .

loco M debita sit altitudini v et vis, qua corpus in M versus C sollicitum sit $= P$ existente vi gravitatis corporis moti $= 1$. Dicatur distantia y et arcus AM s ; erit elementum $Mm = ds$ et $Mn = -dy$. Centro C describantur arcus circulares MP , mp ; erit $AP = a - y$, $Pp = Mn = -dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT erit

$$MC : MT :: Mm : Mn$$

et

$$MC : CT :: Mm : mn,$$

undo erit

$$MT = -\frac{y dy}{ds} \quad \text{et} \quad CT = y \sqrt{\frac{ds^2 - dy^2}{ds}}.$$

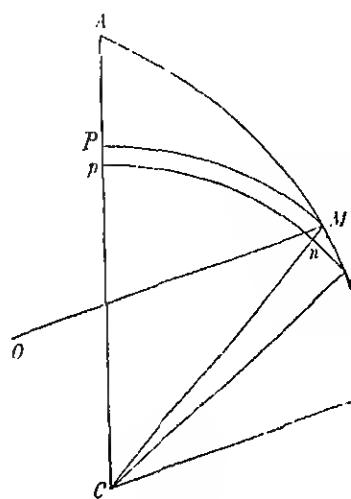


Fig. 26.

Ex quibus, si vis centripeta in tangentialem secundum MT et normalem secundum MO resolvatur, erit vis tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $= \frac{Py(ds^2 - dy^2)}{ds}$. Ex vi tangentiali orgo habebitur $dv = -Pdy$. Ponatur intervallum AX quo corpus propius ad centrum accessit; erit $a - y = x$ et $dx = -dy$. Igitur erit $dv = Pdx$, et si P a distantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi igitur integrali $\int Pdx$ accepto, ut evanescat posito $x = 0$, erit

$$v = b + \int Pdx.$$

Ex quo tempus per arcum AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{b + \int Pdx}}.$$

Vis normalis $\frac{Py(ds^2 - dy^2)}{ds}$ tota in pressione curvae secundum MO insurget. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga simul exhiberi possit, pono perpendiculum $CT = p$; erit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$. Doinde radius MO erit $= \frac{y dy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga

$$= \frac{2vdp}{y dy} = \frac{2dp(b + \int Pdx)}{y dy},$$

cuius effectus effectui vis normalis est contrarius. Quamobrem versus MO premetur vi

$$= \frac{Ppdy - 2bdp - 2dp \int Pdx}{ydy}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

196. Si igitur vis P a distantia y tantum pendeat, ita aequalibus a centro distantis aequaliter urgeatur, celeritas distantia quoque tantum pendebit atque corpus super curva aequalibus a centro distantis aequales habebit celeritates.

COROLLARIUM 2

197. Atque in quovis puncto M celeritas tanta erit, corpus acquireret, si eadem celeritate initiali \sqrt{b} ex A per i descenderet, existente nimirum $CP = CM$.

COROLLARIUM 3

198. Etiam si igitur ipsa curva AM sit incognita, tamen ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari pro distantia y

$$v = b + \int Pdx$$

existente $x = a - y$.

COROLLARIUM 4

199. Si curva AM fuerit talis, ut pressio, quam corpus in M sit nulla, erit curva ea ipsa, quam corpus motum in A cyclochoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero

$$Ppdy = 2bdp + 2dp \int Pdx,$$

seu ob $dx = -dy$ habebitur

$$Ppdy + 2dp \int Pdy = 2bdp.$$

Cuius integralis ost

$$p^2 \int Pdy = bp^2 - bh^2$$

nte h perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus invenitur

$$P = -\frac{2bh^2 dp}{p^3 dy},$$

in antecedente libro [§ 587] pro motu libero invenimus.

COROLLARIUM 5

00. In motu igitur super quacunque curva AM pressio, quam curva secundum MO sustinet, est

$$= -\frac{\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{p y dy} = -\frac{\text{diff. } p^2(b + \int P dx)}{p dx(a-x)} = \frac{\text{diff. } p^2 x}{p dx(a-x)}.$$

EXEMPLUM 1

01. Sit curva AM circulus centrum in C habens, erit motus corporis liberis propter eandem eius perpetuo a centro virium C distantium. Quare $b = 0$ et $\int P dx = 0$ atque tempus per AM

$$= \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}.$$

et cum sit $y = a$, erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam corpus secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P = \frac{2b}{a}$. Nonne perspicitur, si fuerit $b = \frac{P a^2}{2}$, corpus libere per hunc circulum transiri.

EXEMPLUM 2

02. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportioni. seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curva AM spiralis logarithmica circa centrum C , ita

$$p = m y$$

$$dp = m dy \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dy}{\sqrt{1-m^2}}.$$

ergo

$$v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)b f^n}{(n+1)f^n}$$

atque tempus per arcum AM

$$= \frac{\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(1-m^2)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1}+(n+1)bf^n)}}$$

Pressio vero, quam curva secundum MO sustinet, erit

$$= \frac{m(n+3)y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2ma^{n+1}}{(n+1)f^n y}.$$

COROLLARIUM 6

203. Corpus igitur, cum in centrum C pervenerit, celeritatem finitam, si $n+1$ est numerus affirmativus; altitudo enim isti celeritati est

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n} + b.$$

At si $n+1$ est numerus negativus vel etiam $= 0$, celeritas corporis erit infinito magna.

COROLLARIUM 7

204. In ipso vero centro corpus vi infinita promoveatur directione tendente, seu vis centrifuga praevalebit, si fuerit $n > -3$. At si $n < -3$, vis normalis praevalebit atque curva vi infinita versus centrum promoveatur.

PROPOSITIO 22

PROBLEMA

205. Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium C (Fig. trahatur dataque sit curva EAF ad oscillandum idonea, determinetur oscillatorium corporis super hac curva.

SOLUTIO

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro normalis, erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantibus,

N , eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla; maxima vero in puncto curvae A centro C proximo; ducaturque recta CAO . Corpus per arcum EAF oscillationes absolvet, ad quas definiendas motum corporis super utraque curva AE et AF investigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A , debita altitudini b et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v . Ponatur distantia CM , cui aequalis sit CP , $=y$ et vis centripeta in $M = P$. Sit $CA = a$ et $AP = x$ atque $AG = k$ sumpta $CG = CE$; erit $y = a + x$ et $CG = CE = a + k$. Posito arcu $AM = s$ erit tangens MT , quam perpendicularum ex C in eam demissum determinat, $= \frac{y dy}{ds}$ ideoque vis tangentialis $= \frac{P dy}{ds}$, quo motui corporis crescento y est contraria; unde habebitur

$$dv = -P dy = -P dx \quad \text{et} \quad v = b - \int P dx$$

integrali $\int P dx$ ita accepto, ut evanescat posito $x = 0$. Si igitur posito $v = 0$, dabit ex aequatione $b = \int P dx$ valor ipsius x orutus intervallum AG seu k . Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int P dx)^2}}$$

ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem institutam, ut integrale evanescat posito [$x = 0$, ponatur] $x = k$ seu $\int P dx = b$. Simili modo tempus per arcum AF invenietur, quo igitur invento summa horum temporum dabit tempus unius somioscillationis. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

206. Si curva AF similis et aequalis fuerit curvae AE , tempora utramque erunt aequalia atque ideo tempus unius somioscillationis aequale duplo tempori per AE .

EXEMPLUM 1

207. Si arcus EAF fuerit infinito parvus, potentia sollicitans P constantiam a centro C invariabilem erit constans $= g$. Sit radius osculi

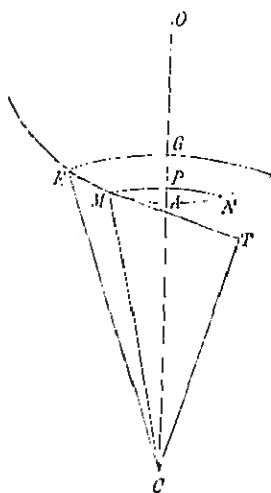


Fig. 27.

in A seu $AO = h$; erit AE arcus circuli hoc radio descri-
circuli erit

$$CT = \frac{a^2 + 2ah - y^2}{2h}$$

et

$$MT = \frac{\sqrt{(4h^2y^2 - a^4 - 4a^3h - 4a^2h^2 + 2a^2y^2 + 4ah^2)}}{2h}$$

Sed ob $y = a + x$ et x respectu a et h infinito parvum e-

$$MT = \frac{\sqrt{2ahx(a+h)}}{h}$$

et

$$ds = \frac{h y dy}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{h(a+x)dx}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)(kx-x^2)}}$$

At cum sit $v = b - gx$ ideoque $b = gk$, habebimus $v =$
mentum temporis

$$= \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)(kx-x^2)}}$$

At

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(kx-x^2)}}$$

posito $x = k \sin \theta$, periphoriae circuli existente diametro
tempus per arcum AE infinito parvum est

$$= \frac{\pi\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)}} = \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}$$

COROLLARIUM 2

208. Si centrum virium
esset $a = \infty$, erit potentiae d
ideoque ut supra erit tempus
absovitur

$$= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$$

At si arcus circuli EA sit
seu $h = \infty$, erit tempus per

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$$

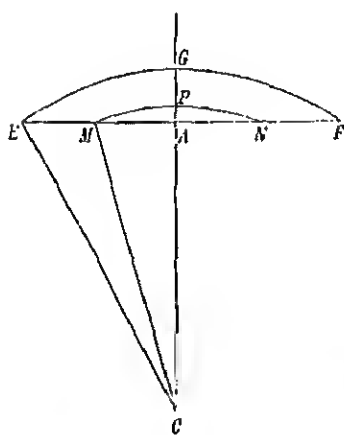


Fig. 28.

COROLLARIUM 3

Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a quoquo, sed directiones sibi parallelas habente, sollicitati, erit penduli longitudo $= \frac{ah}{a+h}$. Tempus enim minus desensus seu ascensus huius est (§ 166)

$$= \frac{\pi \sqrt{2ah}}{2 \sqrt{g(a+h)}}.$$

EXEMPLUM 2

Sit iam (Fig. 28, p. 80) vis contripeta potestati cuicunque distantiarum alis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et linea EE' recta. Erit

$$AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)} \quad \text{et} \quad x = y - a.$$

porro

$$v = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

$v = 0$ fiat

$$y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)bf^n = (a+k)^{n+1}.$$

$CE = c$ erit

$$b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n} \quad \text{et} \quad v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Porro ob $ds = \frac{y dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{y dy \sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}.$$

Integralo ita est accipiendum, ut fiat $= 0$ posito $y = a$. Tumque facto obibitur tempus per lineam EA . Semioscillatio vero seu motus per lineam EA habebitur duplo huius temporis.

COROLLARIUM 4

211. Ponatur vis centripeta distantis proportionalis secundo tempus per AM

$$\int \frac{y dy \sqrt{2f}}{V(y^2 - a^2)(c^2 - y^2)}$$

sen posito $AE = i$ ob $c^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus

$$\int \frac{ds \sqrt{2f}}{V(i^2 - s^2)}$$

unde tempus per AE erit $\pi \sqrt{2f}$. Omnes igitur oscillationes recta absolvantur eodem tempore; dimidia nimirum oscillationis $\pi \sqrt{2f}$ conficietur.

COROLLARIUM 5

212. Si oscillatio est infinite parva, tempus unius semioscillationis recta erit quoque $\pi \sqrt{2f}$; at cum vis centripeta tam ut constare possit, sit ea $\propto g$; erit $\frac{\pi}{f} = g$ ideoque tempus unius semioscillationis ut supra § 208.

COROLLARIUM 6

213. Quia directiones gravitatis revera convergunt ad centrum corpus in superficie telluris super recta perfecto horizontum peragere possit, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus unius semioscillationis talis foret (ob a semidiametro terrae) minut. secund. (§ 183).

PROPOSITIO 23

PROBLEMA

214. Si corpus sollicitetur a duabus quibuscunque potentis, quorum directio sit verticalis MQ (Fig. 29, p. 83), alterius horizontalis motum corporis ab istis viribus sollicitati super data curva AMB .

SOLUTIO

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini r . Vis secundum MQ sit $\propto P$ et ea secundum MP $\propto Q$. Ponatur BR

COROLLARIUM 1

215. Si F est functio ipsius x vel t quaecunque et Q vel z quaecunque, tam $P'dx$ quam Qdy integrari poterunt; aliter v poterit exhiberi et ope aequationis pro curva tempus

COROLLARIUM 2

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae sollicitationum earum directiones sint in eo plano, in quo est curva AMB , in potentias possunt resolvi, haec propositio latissime patet et complectitur, quibus potentiarum directiones et curva sunt i

SCHOLION

217. Patet etiam haec propositio latius, si pauca adiciamus. habet casus, quibus non omnes potentiarum directiones curvae. Tum enim hae potentiae in binas sunt resolvendae, sint in ipso curvae plano, alterae ad hoc planum normales. In plano curvae sitae eodem modo, quo in propositione usi sumus, dabunt accelerationem corporis et pressionem secundum AM potentiae, quia normales sunt in curvam, in curva premissa tantum. Quare hiuc duplex nascetur pressio, quam curva sustinet, una MN directa, altera ad planum curvae normalis. Harum igitur summa si media sumatur directio. prohibet directio potentiae qua curva premitur. Quamobrem non est opus, ut huiusmodi tractemus, sed paucis attingemus motum corporum super curva, est in plano sita, ubi potentiam sollicitantem constantem adhibentem ponemus.

PROPOSITIO 24

PROBLEMA

218. *Existente potentia sollicitante uniformi eiusque directio tendente determinare motum corporis super curva quacunque AM non in eodem plano constituta.*

SOLUTIO

Sit curva AQ projectio curvae AM in plano horizontali punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendi

ad axem pro lubito assumtum AP normales QP et gp ponaturque
 $PQ = y$ et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b ,
 in M debita altitudini v . Potentia
 g , qua corpus in M secundum
 elicitatur. Ducta tangente MT et
 ex Q perpendiculari QT' resolvatur
 g in tangentialem et normalem.

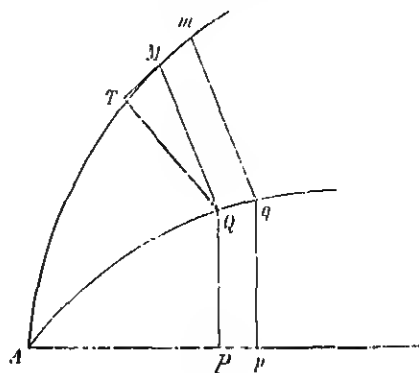


Fig. 30.

$$Q : MT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : dz$$

gentialis

$$= \frac{g dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

ob

$$MQ : QT' = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

nalis

$$= \frac{g \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

tem vis tangentialis motum retardat, erit

$$dv = -g dz \quad \text{et} \quad v = b - gz,$$

mpus, quo arcus AM absolvetur, prodit

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{(b - gz)}}$$

nalis vero officiet, ut curva in M a corpore tanta vi prematur iuxta
 em ad Mm normalem et in plano $QMmq$ sitam. Premitur vero
 tractora a vi centrifuga secundum directionem positioni radii osculi
 in vi

$$= \frac{2(b - gz)}{r}$$

te r radium osculi curvae in M . Invenimus autem supra (§ 71) po-
 radii osculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innotescit.
 s vero vis centrifugae dabitur ex radio osculi, qui § 72 est inventus;
 oc

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2 ddy^2 + ddz^2) + (dy ddz - dz ddy)^2}}$$

COROLLARIUM 1

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantum corpus per eandem altitudinem b cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

COROLLARIUM 2

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, si ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b - gz = 0$, corpus in ea altitudine omnino amiserit iterumque descendet.

COROLLARIUM 3

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset, variabilis P , tum inventam fuisse celeritatem in M debitam

$$b - \int P dz.$$

SCHOLION 1

222. Si in plano verticali concipiatur curva AM (Fig. 31.) horizontali AQ relata fueritque $AQ =$ curvae AQ praeced. fig.

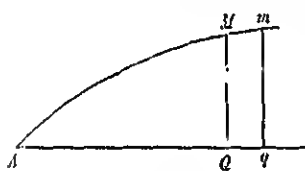


Fig. 31.

praeced. fig., erit quoque curva AM eadem, quae curvae AM praeced. fig. Si iam corpus in A ascendat celeritate initiali in altitudinem b et ab eadem potentia g scilicet in M quoque celeritatem altitudinis b habebit. Atque ideo tempus quoque

congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. fig. Si autem motus corporis super curva non in eodem plano sita sit, motum super curva in eodem plano posita. Inter motus erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curvae habebunt, erunt diversae. Quamobrem hoc modo pressio, ut libet, poterit inveniri motu corporis super curva eodem.

SCHOLION 2

223. Posuimus hactenus curvam, super qua corpus movebitur sollicitantem una cum directione datas ex iisque motum

curvae deduximus. Nunc igitur, cum haec sufficere possint, ad alias
 quæstiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiantur reliquæque sunt
 erenda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curvæ punctis et
 vis sollicitans; ex quibus ipsa curva et motus super ea debeat inveniri.
 De aliis factis combinationibus inter eas res, quæ in computum veniunt,
 quæstiones formabimus.

PROPOSITIO 25

PROBLEMA

24. Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam
 (Fig. 32), quam corpus super ea descendens ubique æqualiter premit.

SOLUTIO

Sit AM curva quaesita; dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$,
 data $PM = y$ et curva $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans
 et altitudo debita celeritati in $A = b$; erit alti-
 tudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$ integrali
 ita sumto, ut evanescat facto $x = 0$. His po-
 terit pressio, quam curva secundum normalem
 sustinet,

$$= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx ddy}{ds^3}$$

sumto elemento dx pro constante. Iam cum
 pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$; erit

$$k ds^3 = P ds^2 dy + 2b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx.$$

ponatur ds constans, habebitur

$$k ds dx = P dx dy + 2b ddy + 2 ddy \int P dx,$$

integralis est

$$\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}.$$

æquatio, cum P per x detur, construi potest, quia y in eam non in-
 tur, sed tantum dy . Q. E. I.

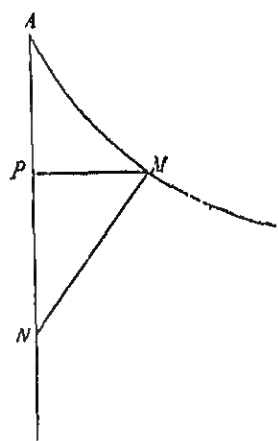


Fig. 32.

COROLLARIUM 1

225. Exprimit

$$\int \frac{dx}{V(b + \int P dx)}$$

tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per altitudinem AP delabitur, et $V(b + \int P dx)$ dat celeritatem. Quare celeritas haec in P per tempus per AP divisa dat $\frac{kd}{2d}$ tato curva AM determinatur.

COROLLARIUM 2

226. Tempus autem per AP quantitate constante quod potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli sinu toto $= 1$. Quare Vc maior non potest accipi quam motus in A a quiete incipit, c debet esse $= 0$.

EXEMPLUM

227. Sit potentia uniformis seu $P = g$; erit

$$\int \frac{k dx}{V(b + gx)} = \frac{2kV(b + gx) - 2kVb + 2kVc}{g} = \frac{2dyV(b + gx)}{ds}$$

unde habetur

$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g} + \frac{k(Vc - Vb)}{gV(b + gx)}$$

atque

$$g dy V(b + gx) = k ds V(b + gx) + k ds (Vc - Vb)$$

Ex qua orietur sequens aequatio

$$dy = \frac{k dx (V(b + gx) + Vc - Vb)}{V(g^2(b + gx) - k^2(V(b + gx) + Vc - Vb)^2)}$$

Sit $V(b + gx) = t$ et $-Vc + Vb = h$; erit

$$x = \frac{t^2 - b}{g} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2t dt}{g}$$

itur substitutis habebitur

$$dy = \frac{2ktdt(t-h)}{g\sqrt{(g^2t^2 - k^2t^2 + 2k^2ht - k^2h^2)}}.$$

haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si
tum enim invenitur curva, quam corpus in A proiectum libere describit.
est casus, quando $h = 0$ seu $\sqrt{b} = \sqrt{c}$; tum enim habetur

$$\frac{dy}{ds} = \frac{k}{g}$$

linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k = g$ seu si tota pressio
est ubique vi sollicitanti corpus g , erit

$$dy = \frac{2tdt - 2hldt}{g\sqrt{(2ht - h^2)}},$$

integralis est

$$gy = \frac{(2t - 2ht - 2h^2)}{5h} \sqrt{(2ht - h^2)} + \text{const.}$$

hanc, quia posito $x = 0$ seu $t = \sqrt{b}$ fit $y = 0$, debet esse

$$= \frac{(2b^2 + 2b\sqrt{b} - 2b)}{5h} \sqrt{(2b\sqrt{b} - b^2)}.$$

ergo $\sqrt{(b + gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b} - \sqrt{c} = h = \sqrt{a}$ habebitur

$$= (b + gx - a - \sqrt{a}(b + gx)) \sqrt{(2\sqrt{a}(b + gx) - a)} + (a - b + \sqrt{ab}) \sqrt{(2\sqrt{ab} - a)}.$$

est aequatio pro curva quaesita, in qua a debet esse numerus minor
 b .

si corpus ex quieto cadere debet, alia linea praeter rectam non satis-
Debet enim esse $c = 0$, ut angulus ad A sit realis, et propterea habetur

$$y = \frac{kx}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}.$$

COROLLARIUM 3

228. Aequatio algebraica inventa, si ab irrationalitate liberetur, fit quinti. Si in ea ponatur $a = b$, quo casu curvae tangens in A est v. probibit

$$\frac{5gy\sqrt{a}}{2} = (gx - \sqrt{a^2 + gax})\sqrt{(2\sqrt{a^2 + gax} - a) + a\sqrt{a}}.$$

COROLLARIUM 4

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c} =$ ideo probibit ista aequatio

$$dy = \frac{kdx(\sqrt{b+gx} - \sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx) - k^2(\sqrt{b+gx} - \sqrt{b})^2)}}.$$

Si tangens in A ponatur horizontalis, erit

$$k\sqrt{c} = g\sqrt{b}$$

habebiturque haec aequatio .

$$dy = \frac{dx(k\sqrt{b+gx} + (g - k\sqrt{b}))}{\sqrt{(g^2(b+gx) - (k\sqrt{b+gx} + (g - k\sqrt{b}))^2)}}.$$

SCHOLION

230. Vocatur haec curva *linea aequabilis pressionis* eiusque solutio in Comment. Acad. Paris., quo cum hac nostra agrogia c. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed variabilis P , aequationem inventam nihilominus integrationem admissio in curvam ipsi P debeat esse proportionalis. Erit enim $k =$ pro curva quaesita probibit sequens aequatio

$$\frac{2dy\sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{m P dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}} ,$$

1) G. F. DE L'HOSPITAL (1661—1704), *Solution d'un problème physico-mathématique par JEAN BERNOULLI*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1700, p. 9. Vide etiam Comment. P. VARIATION (1654—1722), *Usage d'une intégrale donnée par G. F. DE L'HOSPITAL, ou sur des courbes en général, avec la solution de quelques autres questions approchantes de* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1710, p. 158. P. St.

integralis est

$$dyV(b + \int Pdx) = mdsV(b + \int Pdx) \div mdsVc.$$

Aequatio, si fuerit $c=0$, erit pro linea recta ad horizontem inclinata. Si Vc definitur angulus, quem curva in A cum vorticali constituit; eius sinus est $m + \frac{mVc}{Vb}$. Quare si sumatur $Vc = -Vb$, curva tanget in A horizontem. Praeterea haec curva hanc habet proprietatem, ut tempus, quo AM percurritur, proportionale sit $m \cdot AM - PM$. Denique ex solutione propositionis fuit solutio sequentis, in qua ex data curva et pressione libelli quaeritur quantitas potentiae deorsum tendentis.

PROPOSITIO 26

PROBLEMA

31. *Data curva AM (Fig. 32, p. 87) et celeritate initiali in A debita altitudini b invenire quantitatem potentiae perpetuo deorsum tendentis, quae faciat, ut super curva AM descendens curvam ubique aequaliter premat.*

SOLUTIO

Est potentia sollicitans quaesita $= P$, dictisque $AP = x$, $PM = y$ et $= s$ atque pressione, quam curva sustinet, $= k$ habebitur ista aequatio

$$kdsdx = Pdx dy + 2bddy + 2ddy \int Pdx$$

in qua ds est elementum constans. Ex hac igitur aequatione quantitas P crui oportet. Aequatio autem per dy multiplicata et integrata dat

$$kds \int dx dy = dy^2 \int Pdx + bdy^2,$$

ex qua prodit

$$\int Pdx + b = \frac{kds}{dy^2} \int dx dy;$$

differentiata dat

$$P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kdsddy}{dx dy^2} \int dx dy.$$

At integrale $\int dx dy$ ita est sumendum, ut posito $x = 0$ fiat

$$\frac{k ds}{dy^2} \int dx dy = b.$$

Quo autem haec integratio facilius succedat, ponatur $dy = p dx$; erit

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2} \quad \text{et} \quad \int dx dy = ds \int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}}$$

ideoque

$$\frac{k ds}{dy^2} \int dx dy = \frac{k(1 + pp)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Ex qua aequatione prodibit

$$P = \frac{k \sqrt{1 + pp}}{p} - \frac{2k dp}{p^2 dx} \int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

232. Ex hac aequatione quoque statim coloritas corporis in punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M est

$$b + \int P dx = \frac{k ds}{dy^2} \int dx dy = \frac{k(1 + pp)}{p^2} \int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}}.$$

Tempus vero, quo arcus AM absolvitur, est

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \int p dx : \sqrt{\int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}}}.$$

COROLLARIUM 2

233. Perspicuum est ex aequatione inventa quantitatem potior fore maiorem, quo maior sit k ceteris paribus; variabilis enim ductus est in pressionem k .

COROLLARIUM 3

234. Etsi vero non videatur potentia P a celeritate initiali quia in expressione b non inest, tamen pendet P ab b ob integ

$$\int \frac{p dx}{\sqrt{1 + pp}},$$

est accipiendum, ut posito $x=0$ fiat

$$\frac{k(1+pp)}{p^3} \int \frac{pdx}{V(1+pp)} = b.$$

ergo celeritate initiali alia prodit potentia sollicitans, tametsi curva
ta eadem maneat.

EXEMPLUM 1

5. Sit curva AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens,
sit $ay = x^2$. Erit ergo

$$dy = \frac{2xdx}{a} \quad \text{hincque} \quad p = \frac{2x}{a}.$$

$$\int \frac{pdx}{V(1+pp)} = \int \frac{2xdx}{V(a^2+4x^2)} = \frac{1}{2} V(a^2+4x^2) + C.$$

erit

$$\frac{k(1+pp)}{p^3} \int \frac{pdx}{V(1+pp)} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}.$$

quantitas cum debeat esse $=b$, si fit $x=0$, erit $C = \frac{a^2}{2}$ seu

$$\int \frac{pdx}{V(1+pp)} = \frac{V(a^2+4x^2)-a}{2}.$$

ibus invenietur

$$P = \frac{ka^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)V(a^2+4x^2)}{4x^3}.$$

ergo puncto A potentia P erit infinite parva; tam numerator enim
denominator evanescunt fitque valor istius expressionis $=0$. Celeritas
in A non potest esse arbitraria, etiam si constans C videatur ex b de-
data. Nam C talem tantum habet valorem, qui expressionem

$$b + \int Pdx = \frac{kds}{dy^3} \int dx dy$$

finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a cuiusque valor invenietur,

si in expressione

$$k(a^2 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} - ka(a^2 + 4x^2)$$

ponatur $x = 0$. Tum autem prodibit

$$b = \frac{ka}{4}.$$

Hac ergo celeritate descensus incipere debet, ut pressio ubi potentia P inventa oriatur.

EXEMPLUM 2

236. Sit curva AM circulus radii a tangens rectam AP

$$y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad \text{et} \quad p = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad \text{atque} \quad \sqrt{(1 + pp)}$$

Fiet ergo

$$\int \frac{pdx}{\sqrt{(1 + pp)}} = \int \frac{x dx}{a} = \frac{x^2}{2a},$$

ad quod constantem addere non licet, quia $\frac{1 + pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit in sciente x . Erit ergo

$$k \frac{(1 + pp)}{pp} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{ka}{2} = b + \int P dx;$$

quare celeritas corporis erit uniformis ideoque potentia sollicitum. Perspicuum enim est corpus a nulla potentia sollicitatum inculi aequabiliter progredi eiusque vim centrifugam esse uniformis magnitudinis.

EXEMPLUM 3

237. Sit curva AM cyclois basin habens horizontalem et verticalem AP in A , ita ut sit

$$dy = \frac{dx \sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

$$p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} \quad \text{et} \quad V(1 + pp) = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

$$\int \frac{p dx}{V(1 + pp)} = \int \frac{dx \sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$$

$$\frac{k(1 + pp)}{pp} = \frac{ka}{2x}.$$

constante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$; quare fiat $C = 0$; erit

$$b + \int P dx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$$

erodibit igitur

$$p = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}.$$

Corpus super cycloide AM ex A descendat ex quiete et sollicitetur potentia, quao reciproco est ut radix quadrata ex abscissa AP , et curvam aequali vi premet.

SCHOLION

Intuitur igitur casus, quibus celeritatem \sqrt{b} non pro lubitu assumere dimodum in his exemplis evenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinito loco $x = 0$, constans in integratione ipsius $\frac{p dx}{V(1+pp)}$ addenda plorummodo determinatur, quod celeritas initialis non debeat esse infinito. Super autem, si curva in A tangit rectam AP , fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum, id quod in causa etiam est, quod in exemplis allatis celeritas sit arbitraria.

PROPOSITIO 27

PROBLEMA

Corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur, invenire curvam (p. 87), super qua corpus ita movetur, ut tota pressio, quam curvam habeat rationem ad pressionem a vi normali ortam.

SOLUTIO

Descendat corpus ex A celeritate debita altitudini b et
 $PM = y$, $AM = s$ sit potentia corpus in M sollicitans
 debita celeritati, quam corpus in M habet, $b + \int' P dx$,
 quam curva in M secundum directionem normalis MN sua

$$= \frac{P dy}{ds} + \frac{2 ddy(b + \int' P dx)}{dx ds}$$

sumto ds pro elemento constante. Iam habentur haec pro
 malem $\frac{P dy}{ds}$ ut m ad 1; erit

$$(m-1)P dx dy = 2 ddy(b + \int' P dx),$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Haec vero reducetur
 $b + \int' P dx$ ad hanc formam

$$\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2 ddy}{dy},$$

quo integrata dat

$$2l \frac{dy}{ds} = (m-1)l \frac{v}{a} \quad \text{seu} \quad \frac{m-1}{v^2} ds = \frac{m-1}{a^2} dy$$

Ex qua habebitur

$$dy = \frac{v^{m-1} dx}{\sqrt{(a^{m-1} - v^{m-1})}} = \frac{dx(b + \int' P dx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (b + \int' P dx)^{\frac{m-1}{2}})}}$$

quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM I

240. Celeritas corporis ibi est nulla, ubi $\frac{dy}{ds} = 0$ seu ubi
 est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positivus seu
 unitate. In his igitur casibus curvam in A tangere ponem
 celeritatem initialem seu $b = 0$.

COROLLARIUM 2

1. Quare si $m > 1$ seu si pressio tota maior est quam pressio a vi orta, curvam quaesitam dabit ista aequatio

$$dy = \frac{dx(fPdx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (fPdx)^{m-1})}},$$

$\int Pdx$ ita debet accipi, ut evanescat posito $x = 0$.

COROLLARIUM 3

2. Si $m = 1$, vis centrifuga evanescet et propterea linea quaesita erit Fit autem ex aequatione $ddy = 0$, quae est proprietas lineae rectae.

COROLLARIUM 4

3. Si $m = 0$, tum tota pressio evanescit; quare tum prodibit curva, corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro utur curva habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{(b - a + \int Pdx)}.$$

COROLLARIUM 5

4. Si m est unitate minor, tunc vis contrifuga erit contraria vi normali propterea curva AM erit concava deorsum. Ponamus igitur in A esse normalem ad AP ; erit $b = a$. Posito igitur $b = a$ habebitur curva quaesita haec aequatio

$$dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{(a + \int Pdx)^{1-m} - a^{1-m}}}.$$

COROLLARIUM 6

5. Pro motu libero igitur, quo casu est $m = 0$, invenietur curva a descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiciatur, aequatione

$$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int Pdx}}.$$

EXEMPLUM 1

246. Sit vis sollicitans uniformis seu $P = g$; erit $\int \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx$, ergo, quibus $m > 1$ et corpus in A ex quieto descendit, quaesitis scripto gc loco a erit haec

$$dy = \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{c^{m+1} - x^{m+1}}}.$$

At si sit $m < 1$ et corpus in A coloritato altitudini a debili horizontaliter, curva, super qua corpus moveri debbit, scripnetur hac aequatione

$$dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{(c+x)^{1-m} - c^{1-m}}}.$$

Haec ergo curvae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2}$ vel $\frac{1-m}{2}$ integer affirmativus. Hoc vero evenit, si m fuerit terminus 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ etc.

COROLLARIUM 7

247. Si igitur tota pressio triple debeat esse maior curva erit circulus tangens rectam AP in A . Namque erit

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} \quad \text{seu} \quad y = c - \sqrt{c^2 - x^2}$$

aequatio ad circulum radii c .

COROLLARIUM 8

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis aequalis vi normali cum omne conspirans; erit curva cycloidem in A tangens. Aequatio enim erit

$$dy = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{c-x}}.$$

EXEMPLUM 2

9. Quaecumque fuerit potentia sollicitans P , requirantur curvae eius-
ut pressio tota, quam curva sustinet, sit duplo maior quam vis nor-
malis quam vis contrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur
et pro curva quaesita haec habebitur aequatio

$$dy = \frac{dx \sqrt{\int P dx}}{\sqrt{a - \int P dx}}.$$

si $\int P dx = X$ erit

$$dy = dx \sqrt{\frac{X}{a - X}} = \frac{X dx}{\sqrt{aX - X^2}}.$$

Exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curvas
proprietatis esse simul lineas celerissimi descensus.

COROLLARIUM 9

10. Perspicitur orge infinitas esse curvas quaestioni satisfacientes propter
libertatem a arbitriariam. Atque infinitae hae curvae omnes tangent rectam
 A .

SCHOLION 1

1. Ex solutione huius problematis apparet, quomodo problema inver-
sus curvae et ratio inter totam pressionem et vim normalem datur, at
vis sollicitantis deorsum tendentis quaeritur, solvi debeat. Cum
t

$$v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$$

si $dy = p dx$

$$v^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{1 + pp} = a^{\frac{m-1}{2}} p,$$

$$v = \frac{ap^{\frac{2}{m-1}}}{(1 + pp)^{m-1}} = b + \int P dx$$

differentiando

$$P dx = \frac{2ap^{\frac{2}{m-1}} dp}{(m-1)(1 + pp)^{m-1}}.$$

Consequenter invenitur

$$P = \frac{2ap^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}} dx}$$

Ubi notandum celeritatem initialem iam esse datam; nam

$$\frac{ap^{\frac{3}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}},$$

si in ea ponatur $x = 0$, dat b .

SCHOLIUM 2

252. Simili modo, si motus corporis seu celeritas ei detur atque relatio pressionis totius ad vim normalem, i celeritate statim potentia sollicitans. Ut sit v altitudo debita erit ob $b + \int P dx = v$

$$P = \frac{dv}{dx}$$

atque aequatio

$$v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$$

dabit naturam curvae requisitae. Cum enim v sit data, vel s et constantibus quantitibus, scilicet quae ad curvam mendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypotetarum vel plurium potentiarum sollicitantium propositi difficultatis, etiamsi ad magis perplexas aequationes pervenire simplicia exempla in medium preferre non liceat ad illud relinquo, hocque eo magis, quod in sequentibus, ubi agatur, eiusdem naturae curvae predeant, quas ibi diligenter sum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia quaeritur vel cum curva ipsa potentia sollicitans. Pro facilia, ut quando vel scala celeritatum vel scala temporum mitto, cum ex expressione celeritatis vel potentia sollicitantis sponte fluat atque temporis expressio facillimo ad celeritatem ob rem huiusmodi afferemus quaestiones, in quibus non tempora dantur, sed relationes quaedam ab iis pendentes

PROPOSITIO 28

PROBLEMA

253. *Sollicitetur corpus a quacunque potentia deorsum tendente; invenire curvam AM (Fig. 33), super qua corpus descendens motu aequabili deorsum feratur, ut aequabiliter a horizontali AB recedat.*

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ et potentia sollicitante $= P$ sit coloritas corporis initialis in A debita altitudini b ; erit coloritas in M debita altitudini $b + \int P dx$. Quare tempusculum, quo elementum Mm percurritur, est

$$\frac{ds}{\sqrt{b + \int P dx}}.$$

Quia autem motus per AM respondere debet motui aequabili per AP , concipiatur corpus motum super AP coloritate constante debita altitudini b ; debet tempus per Pp aequari tempori per Mm , unde habebitur

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{b + \int P dx}}$$

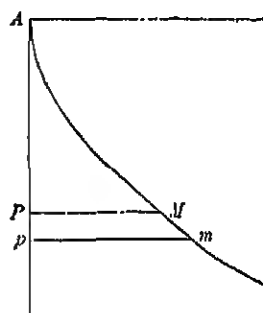


Fig. 33.

$$dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}.$$

Quoniam autem coloritatem initialem congruentem cum coloritate descensus, curva in A tangat vorticalom AP et corpus primo principio recta descendat, nam quia propter motum acceleratum necesse est, ut curva continuo in A horizontem inclinetur, eius initium commodissimo sumetur in A , curva est vorticalis. Prodiitque ergo pro hac curva aequatio

$$dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dx}.$$

COROLLARIUM 1

254. Haec ergo curva hanc habet proprietatem, ut, quod
poris celeritas, eo magis quoque curva in eo loco ad horizo-

COROLLARIUM 2

255. In loco ergo supremo, ubi celeritas corporis est
curvae debet esse minima seu tangens curvae in eo loco de-

COROLLARIUM 3

256. Celeritas igitur initialis \sqrt{b} non potest esse nulla
est celeritas respectiva, qua corpus deorsum progreditur
 AB recedit.

SCHOLIUM 1

257. Vocatur haec curva *linea aequabilis descensus*, qui
descendens aequabili motu deorsum progreditur. Janssonius hanc
in Act. Erud. Lips. A. 1689¹⁾ pro hypothosi gravitatis se-
citantis uniformis²⁾. Satisfacere autem huic quaestioni
parabola cubicalis NEWTONIANA, quae eadem in exemplo sequo-

EXEMPLUM 1

258. Sit potentia sollicitans uniformis seu $P = g$;
Quare pro curva quaesita habebitur ista aequatio

$$dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gx},$$

quae integrata praebet hanc

$$3y \sqrt{b} = 2x \sqrt{gx} \quad \text{seu} \quad \frac{9by^3}{4g} = x^3,$$

1) Editio princeps: A. 1690. Correxerit P. St.

2) G. W. LEMNIZ, *De linea isochrona, in qua grave sine acceleratione*
1689, p. 195; *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERMANN
Halle 1858, p. 234. P. St.

pro parabola NEILIANA cuspido in A verticalem AP tangente, cuius
 er est $\frac{yb}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali alia est sumenda

EXEMPLUM 2

Sit potentia sollicitans P potestati cuicunque abscissarum data
 etarum proportionalis ut

$$P = \frac{(a+x)^n}{f^n};$$

$$\int P dx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

om pro curva satisfaciende habebitur ista aequatio

$$dy \sqrt{(n+1)bf^n} = dx \sqrt{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}.$$

ita ut potentia sollicitans P sit potestati exponentis n distantiarum
 a horizontali AB proportionalis, erit

$$dy \sqrt{(n+1)bf^n} = dx \sqrt{x^{n+1}},$$

integralis est

$$y \sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}.$$

$$\frac{(n+1)(n+3)^2}{4} bf^n y^2 = x^{n+3}.$$

debet esse numerus affirmativus; alioquin $\int P dx$ fieret infinitum,
 nescire debet facto $x=0$. Fit ergo $n+3 > 2$; quare satisfaciunt
 vorticibus in A vorticalom AP tangentos. Ut, si $n=1$ seu
 satisfaciot parabola APOLLONIANA, cuius parameter est $2\sqrt{2}bf$.

SCHOLION 2

Ex huius propositionis solutione perspicitur, quomodo eius inversa
 , qua data curva, quao sit linea aequabilis descensus, requiritur
 sollicitans. Cum enim sit

$$dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx},$$

erit

$$\int P dx = \frac{b dy^2}{dx^2}.$$

Ex qua oritur posito dx constante

$$P = \frac{2b dy dy}{dx^3}.$$

Perspicitur ergo potentiam P a celeritate initiali \sqrt{b} pendenda ita esse debet comparata, ut in A tangat verticalen radius osculi in M dicatur r , erit

$$P = \frac{2b ds^2 dy}{r dx^4}.$$

Quare si ex. gr. curva AM fuerit circulus tangens AP in A , $r = a$, erit

$$r = a, \quad dy = \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Pro circulo ergo erit

$$P = \frac{2a^2 bx}{(a^2 - x^2)^3}.$$

Celeritas vero in M debita est altitudini

$$b + \int P dx = \frac{a^2 b}{a^2 - x^2}.$$

COROLLARIUM 4

261. Patet ceterum ex aequatione, quam invenimus (§

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{b + \int P dx}}$$

tempus, quo arcus AM describitur, aequale esse tempori, quo arcus AP percurritur celeritate altitudini b debita abscissam AP percurrentem, scilicet natura lineae aequabilis descensus nititur.

PROPOSITIO 29

PROBLEMA

Trahente uniformi potentia ubique verticaliter deorsum invenire curvam g. 34), super qua corpus aequabiliter versus datum plagam AP progreditur.

SOLUTIO

AM curva quaesita et pro axe sumatur oïus tangens *AP*, quae datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, ut corpus super *AM* potentia uniformi *g* sollicitatum eodem ad *M* perveniat, quo corpus motu, nempe celeritate \sqrt{b} , latum abscissum tantum *AP* percurrit, eritquo celeritas in *A* debita altitudini *b*. Dicantur $PM = y$ et $AM = s$ ducaturque *AQ* in *Q* secans horizontalem *MQ*. Igitur corporis in *M* tanta erit, quantum cadendo per *AQ* cum sua celeritate perorot; quare celeritas corporis in *M* erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Conditionom problematis vero debet esse

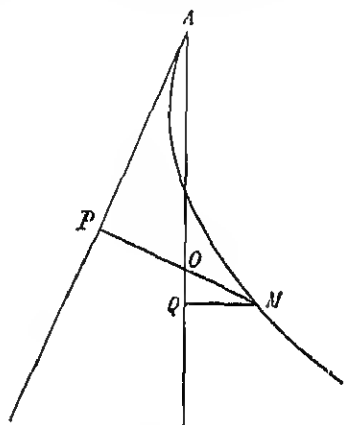


Fig. 34.

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b + gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}} \quad \text{seu} \quad \frac{ds}{\sqrt{(b + gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}},$$

hæc æquatio

$$dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gz}.$$

et *y* dabitur ex angulo *PAQ*; sit sinus huius anguli = *m*, erit $\sqrt{(1 - m^2)}$ posito sinu toto = 1. Nunc erit

$$\sqrt{(1 - m^2)} : m = AP(x) : PO,$$

erit

$$PO = - \frac{mx}{\sqrt{(1 - m^2)}} \quad \text{ideoque} \quad MO = \frac{y \sqrt{(1 - m^2)} - mx}{\sqrt{(1 - m^2)}}.$$

At AO fiet

$$= \frac{x}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Deinde ob $1:m = MO:OQ$ erit

$$OQ = \frac{my \sqrt{1-m^2} - m^2 x}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Consequenter

$$AQ = z = my + x \sqrt{1-m^2}$$

et hinc

$$dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx \sqrt{1-m^2}}{m}.$$

Quo valore in aequatione inventa substituto prodit

$$dz \sqrt{b} = dx \sqrt{b(1-m^2)} + m dx \sqrt{gz},$$

quae transit in hanc

$$dx = \frac{dz \sqrt{b}}{m \sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}.$$

Cuius integralis invenitur

$$x = \frac{2\sqrt{bz}}{m\sqrt{g}} - \frac{2b\sqrt{1-m^2}}{m^2 g} \log \frac{m\sqrt{gz} + \sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}.$$

Quae aequatio loco z valore $my + x\sqrt{1-m^2}$ substituta
curvae quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

263. Curva ergo satisfaciens semper ost linea trans
logarithmis pendens, nisi sit m vel 0 vel 1, i. e. nisi recta
calis vel horizontalis.

COROLLARIUM 2

264. Si igitur $m=0$, problema cum praecedente
 $z=x$ ideoque curva exprimitur hac aequatione

$$dy \sqrt{b} = dx \sqrt{gz},$$

quae dat parabolam cubicalem ut supra.

1) Editio princeps: $x = \frac{2\sqrt{bz}}{m^2 g} - \dots$ Corroxit P. St.

COROLLARIUM 3

265. Si $m = 1$, fit linea AP horizontalis et $z = y$. Habetur ergo

$$dx = \frac{dy \sqrt{b}}{\sqrt{gy}} \quad \text{seu} \quad x = \frac{2 \sqrt{by}}{\sqrt{g}} \quad \text{seu} \quad x^2 = \frac{4by}{g}.$$

ergo curva est ipsa proiectoria, quam corpus in A celeritate \sqrt{b} horizontaliter proiectum libere describit. Haec enim curva, ut ex superiore libro intelligitur, hanc habet proprietatem, ut motus horizontalis sit aequa-

COROLLARIUM 4

266. Si x et y et consequenter z est valde parvum, erit

$$z \left(1 + \frac{m \sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} \right) = \frac{m \sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{m m g z}{2 b (1-m^2)} + \frac{m^3 g z \sqrt{gz}}{3 b (1-m^2) \sqrt{b(1-m^2)}}$$

proxime. Initium ergo curvae AM exprimitur hac aequatione

$$x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2 m z \sqrt{gz}}{3 (1-m^2) \sqrt{b}}$$

ob $z = my + x \sqrt{(1-m^2)}$ ista

$$y = \frac{2 (my + x \sqrt{(1-m^2)}) \sqrt{g} (my + x \sqrt{(1-m^2)})}{3 \sqrt{b(1-m^2)}},$$

reducitur ad hanc

$$\frac{9 b (1-m^2) y^2}{4 g} = (my + x \sqrt{(1-m^2)})^3.$$

COROLLARIUM 5

267. Si $m = 1$ seu si linea AP est horizontalis et series logarithmo illius continuatur in infinitum hacque series loco illius substituitur, terminos prae infinitesimo ∞ evanescent. Dabit autem infinitesimum seu $y = 0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quod

que satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum; recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus est aequabilis.

SCHOLION 1

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differens quoque, quae prodit, si ponatur $m=1$, parabolam tantum horizontalem excludere videatur. Sed notandum est lineam talem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere, cum mobilis atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progredietur; autem est aequationem nostram generalior hanc rectam habere possumus, quia rectam AP nusquam tangit nisi in casu $m=1$ congruit. Atque haec ipsa ratio quoque est, cur pro linea recta non directio inveniri queat.

SCHOLION 2

269. Manifestum quoque est eadem opera problema tantum solvi potuisse, si scilicet potentia sollicitans non uniformis uterunque esset posita. Namque substituto P loco in aequatione differentiali prodisset haec aequatio

$$dy \sqrt{b} = dx \int P dz$$

pro curva quaesita. Habet vero z eundem valorem quem ab altitudine z et constantibus tantum pendeat, poterit vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curva pervenietur enim ad hanc aequationem

$$dx = \frac{dz \sqrt{b}}{m \int P dz + \sqrt{b} (1 - m^2)},$$

in qua variables x et z sunt a se invicem separatae. Non nimis lata significatione confusum officere. Quando enim neque plus difficultatis habet in se neque ad peculiariora potest, eo relicto particulari tantum problema pertractare eandem rationem sequens problema isochronae paracontantum potentiae uniformis et deorsum directae resolvo.

PROPOSITIO 30

PROBLEMA

. In hypothesi potentiae sollicitantis uniformis et deorsum tendentis invicem AM (Fig. 35), super qua corpus descendens acquabiliter a dato L recedit.

SOLUTIO

AM curva quaesita; oius sumatur tangens *CA*, quae per datum *C* transit; erit corporis in *A* celeritas minima. Quia enim haec tota ad recedendum a *C* impendit, aliis curvae elementis necesse est, ut celeritas sit maior; eo, quod eius tantum recessum insumitur. Punctum *A* est supremum curvae quaesitae. Sit celeritas corporis in *A* debita altitudinis *CA* aequo celeritate concipiatur corpus uniformiter moveri; debet itaque tempus cum descensu corporis super *AM* ita convenire, ut ad quaeque *P* et *M* aequaliter ab *C* distantia perveniantur. Posita celeritate in *M* altitudini *v* ducatur $CP = CM = x$ sinus ang. $PCM = t$ posito sinu 1. Ducantur arcus circulares PM centro *C*; erit $Mn = Pp = dx$ et ang. pCm sinus $= t + dt$. Quare

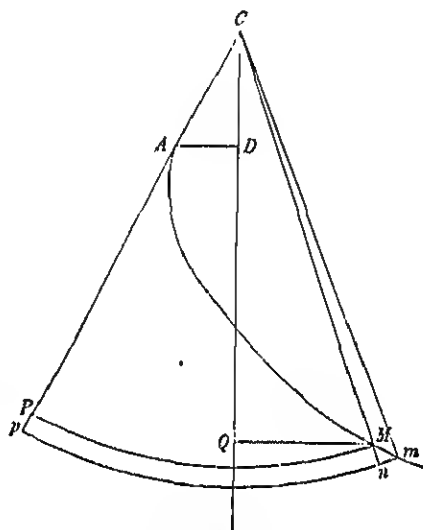


Fig. 36.

$$\text{sinus ang. } mCn = \frac{dt}{V(1-t)} = \frac{mn}{x}.$$

$$mn = \frac{xd t}{V(1-tt)} \quad \text{atquo} \quad Mm = V \left(dx^3 + \frac{x^2 dt^3}{1-tt} \right).$$

o elementum Mm coloritato Vv eodem tempore describi debeat, quo
um Pp coloritato Vb , erit

$$\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{v} + \frac{x^2 dt^2}{(1-tt)v}\right)}$$

seu

$$dx\sqrt{(1-tt)(v-b)} = xdt\sqrt{b}.$$

Requiritur ergo, ut v determinetur. Ad hoc ducatur
et horizontales AD et MQ ; postquam ergo corpus ex
deorsum pervenit intervallo DQ . Quare posita potentia

$$v = b + g \cdot DQ = b + g \cdot CQ - g \cdot CD$$

Sit $AC = a$, sinus anguli $ACD = m$; erit eius cosinus
erit

$$CD = a\sqrt{(1-m^2)}$$

et

$$\text{cosinus ang. } MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)}(1-t^2)$$

Quam ob rem erit

$$CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2).$$

Ex quibus conficitur

$$v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}$$

Quo loco v valore substituto prodibit ista aequatio

$$dx\sqrt{(1-tt)(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2) - ga\sqrt{(1-m^2)})}$$

seu haec

$$\frac{dx}{x} \sqrt{(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}(1-t^2) - ga\sqrt{(1-m^2)})}$$

Quae aequatio exprimit naturam curvae quaesitae et, si
a se invicem separari possent, ipsa curva construi poss

COROLLARIUM 1

271. Perspicuum igitur est ex aequatione inventa
quaesito satisfacere ob tres quantitates, angulum scilicet
 AC et celeritatem \sqrt{b} , qua corpus a fixo puncto C re
variari possunt.

COROLLARIUM 2

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curvas quaesito satisfaciens. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curvae satisfaciens exhiberi non possunt.

COROLLARIUM 3

273. Quod ad figuram curvarum harum attinet, intelligitur eas omnes in A cuspide habere debere, quia A est punctum supremum. Alter curvae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet ex casu, quo CAP fit linea horizontalis; tum enim haec ratio cessat.

COROLLARIUM 4

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aequae satisfaciens problema ac isto AM . Invenitur enim eadem ex aequatione, si modo t angulus PCM accipitur negativus.

COROLLARIUM 5

275. Ex sola autem aequationis inventae inspectione perspicitur duobus casibus separationem indeterminatarum admittere, quorum alter si $a = 0$, alter, si $m = 1$. Illo scilicet casu evanescit distantia AC et etiam A in C incidit; hoc vero casu recta CP fit horizontalis. Hos itaque ambos casus in sequentibus duobus exemplis evolvemus.

EXEMPLUM 1

276. Incidat ergo punctum A in C , seu corpus descensum incipiat ipso puncto C ; fiet $a = 0$. Hoc ergo casu aequatio pro curva quaevolvitur abibit in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{V(1-tt)(mt + \sqrt{1-m^2}(1-t^2))},$$

in qua indeterminatae a se invicem sunt separatae. Constructio igitur cu

quaesitae per quadraturas confici poterit; fiat enim

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt + \sqrt{1-m^2}(1-t^2))}}$$

quae integratio ita debet absolvi, ut facto $t=0$ fiat $x=0$.
 ralis aequatio ita debet integrari, ut posito $t=0$ fiat
 casu integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt + \sqrt{1-m^2}(1-t^2))}}$$

ita est accipiendum, ut facto $t=0$ ipsum evanescat.
 huius integralis vero melius perspicendam pono cosinu

$$mt + \sqrt{1-m^2}(1-tt) = q,$$

quo facto fiet sinus ang. $M'C'm$ sen

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-q^2)}}.$$

Hisque substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^2)}},$$

quod integrale ita est accipiendum, ut facto $q = \sqrt{1-m^2}$

COROLLARIUM 6

277. Si ipsi b diversi valores attribuantur, omnes
 erunt inter se similes; manente enim angulo MCP dis-
 nalis est accipienda ipsi b , altitudini generanti celeritat

COROLLARIUM 7

278. Quicumque ergo fuerit angulus ACQ , constans
 sed tantum constans adicienda. Quare constructio in
 omnes casus potest accommodari.

SCHOLIUM 1

Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo propositum et solutum in Act. Lips. A. 1694¹⁾ atque solutiones, quae conveniunt apprimè cum casu huius exempli; universalis enim loco non est data.²⁾ Quamobrem casus exempli sequentis novas se videtur curvas huic quaestioni satisfacièntes. At quia sequens cum hac convenit, quanquam ipsae curvae sint prorsus differentes, et sequens casus in iis, quo hac de re tradita sunt, contineri potest. Vocantur autem istiusmodi curvae *isochronae paracentricae*, super iis a centro fixo fit aequabilis.

EXEMPLUM 2

Si linea *CAP* horizontalis; fiet $m = 1$ atque in aequatione generali terminus $ga\sqrt{1-m^2}$. Hoc igitur casu aequatio fit ut ante transmutabitur enim generalis aequatio in hanc

$$\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}} \quad \text{sen} \quad \frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$$

quale ita est accipiendum, ut posito $t = 0$ fiat $x = a$. Quare si integrato, ut evanescat posito $t = 0$, erit

$$\frac{2\sqrt{gx} - 2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$$

Constructio ergo cum praecedente convenit.

Principes: A. 1695. Corroxit P. St.

BERNOULLI, *Solutio problematis LEIBNITIANI, de curva accessus et recessus aequabilis mediante rectificatione curvae elasticæ*, Acta erud. 1694, p. 276; Opera, Genovae

BERNOULLI, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae elasticæ*, Acta erud. 1694, p. 336; Opera, Genevae 1744, p. 608.

BERNOULLI, *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica*, Acta erud. 1694, p. 364; Mathematische Schriften, herausgegeben von C. I. GERHARDT, 2. Abteilung, Berlin 1858, p. 309; vide etiam Iac. BERNOULLI, Opera, Genovae 1744, p. 627.

BERNOULLI, *Constructio facili curvae recessus aequabilis a dato puncto, per rectificationem algebraicæ*, Acta erud. 1694, p. 394; Opera omnia, Tom. I, Lausannae et Lugduni Batavorum 1744, p. 119. P. St.

BERNOULLI Opera omnia II: Mechanica

SCHOLION 2

281. An praeter hos duos casus alii inveniri queant, indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A neminem scio, alius est erutus, quamobrem non necesse esse iudico, diutius immoror.

PROPOSITIO 31

PROBLEMA

282. *Potentia sollicitante existente uniformi et deorsum curvam AM (Fig. 36), super qua corpus data cum celeritate v descendit, ut aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum C describat.*

SOLUTIO

Sumatur initium curvae in loco quodam A , in quo tangens curvae est normalis, sitque celeritas in A debita altitudini AD .

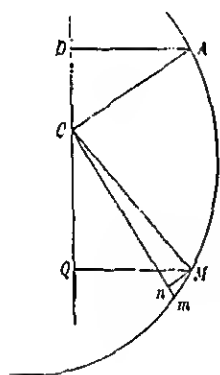


Fig. 36.

erit celeritas angularis ut \sqrt{b} , cuiusmodi celeritas angularis in singulis punctis M curvae aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiet ut

$$Mm : Mn = Vv : \frac{Mn}{Mm}$$

quae quantitas per MC divisa dabitur altitudinem

$$= \frac{Mn \cdot Vv}{Mm \cdot MC};$$

quae cum aequalis esse debeat ipsi \sqrt{b} , habebitur haec aequatio

$$Mn \cdot a \sqrt{v} = Mm \cdot MC \cdot \sqrt{b} = Mm \cdot x \sqrt{b}.$$

Sit iam ducta verticali DCQ sinus ang. $ACD = m$, $= \sqrt{1 - m^2}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCN

$= V(1 - tt)$. His igitur positis erit

$$CD = aV(1 - m^2) \quad \text{et} \quad CQ = -xV(1 - tt)$$

et

$$\sinus \text{ ang. } M C m = \frac{dt}{V(1 - tt)} = \frac{Mn}{x},$$

et

$$Mn = \frac{x dt}{V(1 - tt)} \quad \text{et} \quad Mm = \frac{V(dx^2 - tt dx^2 + x^2 dt^2)}{V(1 - tt)}.$$

corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit

$$v = b + g \cdot DQ = b + gaV(1 - m^2) - gxV(1 - tt).$$

valoribus in aequatione inventa substitutis orietur haec aequatio

$$dx^2(1 - tt) = a^2 b dt^2 + ga^2 dt^2 V(1 - m^2) - ga^2 x dt^2 V(1 - tt) - bx^2 dt^2$$

$$dx \sqrt{b} = \frac{dt V(a^2 b + ga^2 V(1 - m^2) - ga^2 x V(1 - tt) - bx^2)}{V(1 - tt)}.$$

aequatio ita integrata, ut posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam quaesitae. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

3. Si loco sinuum angulorum ACD , MCD eorum cosinus introducat quo $V(1 - m^2) = n$ et $V(1 - tt) = q$, erit

$$dx \sqrt{b} = \frac{-dq V(a^2 b + gna^2 - ga^2 qx - bx^2)}{V(1 - q^2)}$$

$$\frac{-dq}{V(1 - q^2)} = \frac{dx \sqrt{b}}{V(b(a^2 - x^2) + ga^2(na - qx))},$$

aequatio est integranda, ut posito $q = n$ fiat $x = a$.

COROLLARIUM 2

4. Ubi curva ad radium CM est normalis, ibi ob evanescens dx erit

$$b(a^2 - x^2) = ga^2(qx - na).$$

Quoties ergo est

$$q = \frac{a^2b + gna^3 - bx^2}{ga^3x},$$

erit curva in radium CM normalis. Quia autem q intra 1 continetur, x non potest esse maior data quantitate; nam $q = \infty$, quod esset absurdum.

COROLLARIUM 3

285. Si CM est normalis in curvam, erit celeritas angu-

$$\frac{Vv}{MC} = \frac{V(b + gna - gqx)}{x},$$

quae aequalis esse debet ipsi $\frac{Vb}{a}$. Maxima ergo est illa si $q = -1$. Ille autem motus angularis eo fit minor, quo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliquo radium MC . Quare curva non ultra datam distantiam poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione

$$xVb = aV(b + gna + gx),$$

nempe

$$x = \frac{ga^3}{2b} + a \sqrt{\left(\frac{g^2a^3}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1\right)}.$$

Haec ergo est maxima curvae a puncto C distantia.

COROLLARIUM 4

286. Cum igitur curva non ultra datam distantiam distare queat, curva haec erit in se rediens. Scilicet revolutionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post infinitas in se redibit, prout littorae a , b , n et g fuerint assumptae.

EXEMPLUM

287. Si potentia sollicitans evanescit, fit $g = 0$ et a promovebitur. Tum igitur pro curva descripta haec habebit

$$\frac{dx}{V(a^2 - x^2)} = \frac{dt}{V(1 - t^2)},$$

us integralis per logarithmos est

$$V-1 \log \left(\frac{xV-1 - V(a^2-x^2)}{c} \right) = V-1 \log (tV-1 - V(1-t))$$

$$xV-1 - V(a^2-x^2) = ctV-1 - cV(1-t).$$

quo reducta dat

$$(a^2-x^2)^2 = 4(a^2+c^2)ctx - 4c^2x^2 - 4a^2c^2t^2.$$

Incidat recta AC in verticalem CD ; hoc enim perinde est ob ovanescerentiam g ; debet ergo fieri $x=a$ posito $t=0$, ex quo fit $a^2+c^2=0$ a

$$a^4 = a^2x^2 + a^4t^2 \quad \text{seu} \quad x^2 = a^2(1-tt).$$

no aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeundo enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuius puncti in periphoria erit aequabilis.

SCHOLION

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque sere, cuius centrum est in puncto fixo C , quippe quo solutio est facienda sua sponte se prodit. Quannobrem maxime mirandum est hunc casum ratione non contineri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, quae § 268 dedimus, ubi simile paradoxum observavimus. Ad circulum in C habentem designandum prodire debuisset $x=a$ sen $dx=0$ sed vero, quia x ut quantitas variabilis consideratur, non fieri potuit, primum cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x quantitas revera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v=b$, $Mn \cdot a = Mm \cdot x$, intelligi potest circulum satisfacero; nam si ubique $x=a$, erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad inveniendas curvas huic problemati satisfaciendas proditurum, si tali motus solutio inveniri possot, quo sponte pro casu motus aequabilis circuli in C habentem esset datura. Cum enim casus simplicissimus ita solutus et abditus, ut elici vix queat, conicere licet alias saepe curvas simplices in generali quapiam solutione contineri, quae sint eruta simae.

COROLLARIUM 1

0. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportio-
empe

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

$$\int P dx = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

stituito habebitur pro curva AM sequens aequatio

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x} \sqrt{\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n}}.$$

aequatio ita debet integrari, ut facto $t=0$ fiat $x=a$.

COROLLARIUM 2

1. Si $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiat, ut fiat $=0$, si $t=0$, prodibit ex illa
one integrata haec

$$\frac{dt}{1-tt} = -2 \frac{\sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{(n+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{bf^n}} + \frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{bf^n}} - t \frac{a^{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}} - \sqrt{(a^{n+1} - x^{n+1})}} = BS,$$

o C radio $BC=1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs . Ex quo patet
 AM infinitos habere gyros, antequam corpus in C perveniat. Nam
 $x=0$ fit $BS=\infty$.

COROLLARIUM 3

2. Pendet igitur constructio huius curvae partim a quadratura circuli,
a logarithmis, si $n+1$ est numerus affirmativus. At si $n+1$ est
s negativus, is terminus, qui per logarithmos erat datus, ad quadra-
circuli quoque reducitur.

COROLLARIUM 4

3. Curva haec punctum habebit flexus contrarii, ubi est $dp=0$. Ad
tur inveniendum sumatur aequatio

$$pp = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx},$$

ex qua differentiata positoque $dp = 0$ prodibit

$$bPx = 2 \left(\int P dx \right)^2 - 2b \int P dx.$$

COROLLARIUM 5

294. In casu igitur, quo $P = \frac{x^n}{f^n}$, punctum flexus con-

$$(n+1)^2 b f^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) b f^n (a$$

Unde haec oritur aequatio

$$\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = - \frac{(n+3) b f^n}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(n+3)^2 b^2 f^{2n} +}$$

Quae in integrali substituta dabit angulum ACM , i flexus contrarii.

SCHOLION 1

295. Cum autem de natura huiusmodi curvarum quicquam producere, ad casus speciales descendendum quod in sequentibus exemplis efficere visum est.

EXEMPLUM 1

296. Sit vis centripeta ipsis distantis proportiona $n=1$. Posito ergo arcu $BS=s$ curva quaesita exprin-

$$s = - \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}} \log \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Ex qua aequatione data quavis puncti M a C distantia BCS , quo absoluto corpus in ea distantia existit. Introducta et perpendicularum $CT=p$ aequatio haec erit

$$pp = \frac{a^2 x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}.$$

vac punctum flexus contrarii erit, ubi est $dp=0$, hoc autem, ubi est

$$x^4 = 2a^2x^2 + 4bf'x^2 - a^4 - 2a^2bf'$$

$$xx = a^2 + 2bf' - \sqrt{(2a^2bf' + 4b^2f^2)},$$

non maior esse potest quam a . Hinc fit

$$x = \sqrt{(a^2 + 2bf' - \sqrt{(2a^2bf' + 4b^2f^2)})}$$

$$\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(2a^2 + 4bf')} - 2\sqrt{bf'}}{\sqrt{(2a^2 + 4bf')}}.$$

ergo, quem curva in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM , erit

$$= \frac{\sqrt{4bf'}}{\sqrt{(2a^2 + 4bf')}}.$$

vero curvae in seriem conversa erit posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$ haec

$$s\sqrt{2bf'} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} + \text{etc.}$$

ergo curvae principio, ubi x non multo minor est quam a seu y vnum, erit

$$s\sqrt{2bf'} = \frac{y^3}{3a^2}.$$

ex ipsa aequatione apparet facto $x=0$ fore $s=\infty$, quare curva inflexa ambit centrum C , eritque, quando corpus centro iam proximum est,

$$\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf' + a^2}.$$

sequitur proxime circa centrum C curvam abire in logarithmicam

Initio princeps: $xx = a^2 + 2bf' - 2\sqrt{(a^2bf' + b^2f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a .
 $= \sqrt{(a^2 + bf')} - \sqrt{bf'}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2 + bf')} - \sqrt{bf'}}{\sqrt{(a^2 + bf')}}.$ Anguli ergo, quem curva in
 s contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt{bf'}}{\sqrt{(a^2 + bf')}}.$ Correxerit P. St.

EXEMPLUM 2

297. Sit $n = -1$ seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$

$$\int P dx = f l \frac{x}{a},$$

unde habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{dl}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{f l \frac{a}{x}},$$

cuius integralis est

$$s = \frac{2f(la - lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}.$$

Altera aequatio inter perpendicularum p et x erit haec

$$pp = \frac{fxx l \frac{a}{x}}{b + f l \frac{a}{x}}.$$

Ex qua invenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo

$$b = 2f\left(l \frac{a}{x}\right)^2 + 2bl \frac{a}{x}$$

seu

$$l \frac{a}{x} = \frac{-b + \sqrt{(bb + 2bf)}}{2f}.$$

Hoc ergo habebitur sumendo

$$s = \frac{\left(-b + \sqrt{(bb + 2bf)}\right)^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2b}}.$$

Perspicitur porro, si fiat $x = 0$, fore $s = \infty$ seu curvam centrum C circumdare; hoc vero casu erit $\frac{pp}{xx} = 1$ seu $p = x$ curva in circulum infinite parvum abit.

EXEMPLUM 3

298. Ponatur $n = -2$, ut vis centripeta sit quadratis distantiae inversa; erit

$$\frac{dl}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-fdx}{x} \sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds.$$

$$\frac{a-x}{x} = yy,$$

$$\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yydy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}.$$

t vero $\int \frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens est y seu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; sit hic arcus

$$t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

ergo data distantia x capiendus est arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis
tao inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum respondentem posito radio $= 1$.
natur $= 0$, fiet $s = \infty$, ex quo sequitur curvam per infinitas spiras
um C descendere. Praeterea ob

$$- \int P dx = \frac{ff(a-x)}{ax}$$

$$pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx + ff(a-x)}.$$

sequitur, si x evanescat, fore $\frac{pp}{xx} = 1$ seu curvam ultimo quoque in
infinito parvum abire.

uerit $ab = ff$, erit

$$pp = \frac{xx(a-x)}{a} \quad \text{et} \quad t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

flexus contrarii hoc orge casu incidet in eum locum, ubi est
 xx seu vel $x = 0$ vel $x = \frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab = 4ff$, erit

$$t + s = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

um flexus contrarii habebitur capiundo [vel $x = 0$ vel] $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

SCHOLION 2

Quo autem apparent, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si
ipeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu

$$P = \frac{x^n}{f^n},$$

consideretur aequatio inter p et x , quae erit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)b f^n + a^{n+1} - x^{n+1}}.$$

Ubi duo distinguendi sunt casus, alter, quo $n+1$ est numerus affirmativus, alter, quo est negativus.

Si $n+1$ est numerus affirmativus, facto $x=0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)b f^n + a^{n+1}}.$$

Hoc ergo casu curva AM circa centrum C abit in logarithmicam.

At si $n+1$ est numerus negativus, facto $x=0$ fit

$$\frac{pp}{xx} = 1.$$

His ergo in casibus curva in C abit in circulum infinitum. In his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite crescit, nisi curva in circulum abiret, corpus celeritate infinita non accederet, quod esset contra conditionem problematis. In casibus curvis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedat, gubimus eas curvas, super quibus motu aequabili circa centrum circumferatur.

PROPOSITIO 33

PROBLEMA

300. Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium, determinare curvam AM , super qua corpus motu angulari circulariter moveatur.

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, ubi curva normalis sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et AC angularis in $A = \frac{Vb}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis locis esse aequalis. Ponatur $CM = x$, cui aequalis capiatur CL .

ta in $M = P$; erit celeritas in M debita altitudini $b - \int P dx$ integrali $\int P dx$ accepto, ut evanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpendiculari ex C in eam demissum $CT = p$; erit $p = Mm : mn$. Hanc ob rem celeritas per mn

$$= p \sqrt{b - \int P dx}$$

celeritas angularis

$$= p \sqrt{b - \int P dx} \cdot \frac{1}{x^2},$$

quo aequalis esse debet ipsi $\frac{1}{a}$. Hinc prodit aequatio

$$bx^4 = a^2 bp^2 - a^2 p^2 \int P dx$$

$$p = \frac{x^2 \sqrt{b}}{a \sqrt{b - \int P dx}}.$$

Intro C radio $BC = 1$ describatur arcus circuli BS , qui dicatur $= s$, et $ds = x : mn$, unde erit $mn = x ds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)}$. Cum nunc $p = \sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)} : x ds$, fiet

$$p = \frac{x ds}{\sqrt{(dx^2 + x^2 ds^2)}}.$$

quo valore in aequatione inventa substituto habebitur

$$bdx^2 + bx^2 ds^2 = a^2 b ds^2 - a^2 ds^2 \int P dx$$

hincque

$$ds = \frac{-dx \sqrt{b}}{\sqrt{(a^2 b - bx^2 - a^2 \int P dx)}}.$$

ex qua aequatione curva quaesita poterit construi. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

301. Quo minor sit x , eo maior fiet $b - \int P dx$, quare, quo minor fiet x , quoque fiet $\frac{p}{x}$ seu sinus anguli GMT . Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x \sqrt{b}}{a \sqrt{b - \int P dx}}$.

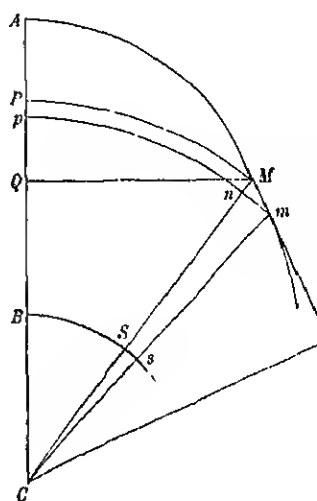


Fig. 38.

COROLLARIUM 2

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione maior quam a ; fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum esse normalis in curvam, nisi qui est maximus, nempe =

SCHOLIUM 1

303. Per se quidem manifestum est in quacunque v^{er}thesi circulum centro C descriptum satisfacere; corpus uniformiter moveri debet. Etiam si autem aequatio generalis comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentam iam supra innuimus.

SCHOLIUM 2

304. Perspicuum autem est nullam aliam curvam esse praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in hoc non potest, ut omnes rectae ex C eductae et in curvam se aequales. Quae igitur curvae praeter circulum problem ipsum centrum C transire debent, ut plus uno radio MC normali. Cuiusmodi ergo sint hae curvae, in sequente o

EXEMPLUM

305. Sit vis centripeta distantis a centro directio
 $P = \frac{x}{f}$; erit

$$-\int P dx = -\frac{a^2 - x^2}{2f}.$$

Quo substituto pro curva sequens prodit aequatio

$$ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{\left(b + \frac{a^2}{2f}\right)(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente tot
 hic arcus per $A \cdot \frac{x}{a}$. Sit sinus arcus $BS = t$, erit $s = A$

$$A \cdot t = \sqrt{\frac{2bf}{a^2 + 2bf}} \cdot \left(A \cdot 1 - A \cdot \frac{x}{a}\right).$$

us, cuius cosinus est $\frac{x}{a}$, erit

$$= A.t \sqrt{\frac{a^2 + 2bf}{2bf}}.$$

Constructio curvae facilis fuit eritque curva algebraica, quoties $\sqrt{\frac{a^2 + 2bf}{2bf}}$ numerus rationalis. Sit

$$\sqrt{\frac{a^2 + 2bf}{2bf}} = m \quad \text{sen} \quad 2bf = \frac{a^2}{m^2 - 1},$$

$$\frac{m dt}{V(1 - tt)} = \frac{-dx}{V(a^2 - x^2)},$$

integralis per logarithmos imaginarios est

$$ml(tV-1 + V(1-tt)) = l\left(x + \frac{V(x^2 - a^2)}{a}\right)$$

$$(tV-1 + V(1-tt))^m = \frac{x + V(x^2 - a^2)}{a}.$$

tur ex M in AC perpendicularum $MQ = y$ et posito $OQ = u$ erit $y : y$ atque $t = \frac{y}{x}$. Propterea prodibit

$$\left(\frac{yV-1 + V(x^2 - y^2)}{x}\right)^m = \frac{x + V(x^2 - a^2)}{a}.$$

$m = 2$ seu $bf = \frac{a^2}{3}$, habebitur ista aequatio

$$\left(\frac{yV-1 + u}{x}\right)^3 = \frac{x + V(x^2 - a^2)}{a}.$$

educta dat hanc

$$x^3 = au^3 - ay^3 = ax^2 - 2ay^2$$

$$y = x \sqrt{\frac{a-x}{2a}} \quad \text{et} \quad u = x \sqrt{\frac{a+x}{2a}}.$$

inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur, ea erit sexti haec

$$(y^2 + u^2)^3 = a^3(u^2 - y^2)^2.$$

In hac curva applicata erit maxima, si $x = \frac{2b}{3}$ seu si sum

$$CQ = \frac{2}{3} a \sqrt[5]{6} = a \sqrt[10]{27};$$

tum enim erit

$$QM = \frac{2}{3} a \sqrt[2]{27}.$$

In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit, ubi

$$my\sqrt{(a^2 - x^2)} = ux.$$

PROPOSITIO 34

PROBLEMA

306. Sit potentia sollicitans uniformis g et ubique deorsum curva AT (Fig. 39); invenire curvam AM , super qua corpus tempus per arcum quemcunque AM proportionale sit radici quadratae respondente PT curvae datae AT .

SOLUTIO

Ponatur abscissa communis $AP = x$, curvae AT applicatae $PT = t$, ergo, quia curva AT datur, aequatio inter x et t , quae tam

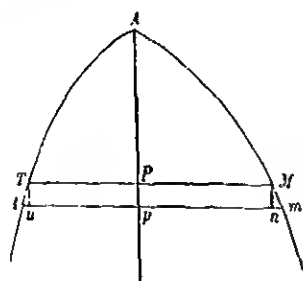


Fig. 39.

evanescente x fiat quoque initium in A ponitur et tota computantur. Sit porro curvae applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$, sit celeritas initialis in A sit V , ergo celeritas in M debita sit v , et tempus, quo arcus AM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{(b + gx)}}.$$

quod aequale esse debet ipsi Vt . Habebitur ergo haec aequatio

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(b + gx)}} = Vt \quad \text{seu} \quad \frac{ds}{\sqrt{(b + gx)}} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

$$dt^2(b+gx) = 4tds^2 = 4tdx^2 + 4tdy^2$$

$$dy = \frac{\sqrt{(bdt^2 + gxd t^2 - 4tdx^2)}}{2\sqrt{t}}.$$

a aequatione, cum t per x detur, curva quaesita AM construi poterit. Item est construenda, ut posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$, quo curvae initium sit in A . Q. E. I.

COROLLARIUM 1

07. Quo igitur curva sit realis, oportet, ut $bdt^2 + gxd t^2$ sit maior quam son

$$\frac{dx}{2\sqrt{t}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}} \quad \text{sive integrando} \quad \sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g}.$$

in fuerit

$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)} - 2\sqrt{b}}{g},$$

AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

COROLLARIUM 2

08. Si igitur in curva AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi as curvae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$ curva AM non consue descendet, sed habebit punctum reversionis in eo loco, ubi tangens est verticalis.

COROLLARIUM 3

09. Si angulus, quem curva AT in A cum verticali AP constituit, acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A

$$t = mx \quad \text{et} \quad \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{m dx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}},$$

unde $m(b + gx)$ minus esse debet quam $4x$, id quod semper fuerit $= 0$. Tum autem erit

$$dy = \frac{dx \sqrt{(bm^2 + gm^2x - 4mx)}}{2\sqrt{mx}}.$$

Posito igitur $x = 0$ fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curvae AM erit horizontalis, nisi sit $b = 0$. At si $b = 0$, erit

$$dy = \frac{dx \sqrt{(gm - 4)}}{2}.$$

Ne igitur curva AM fiat imaginaria, debet gm minus esse quam 4 , tum curva AM cum AP in A angulum acutum constituet,

$$\frac{\sqrt{(gm - 4)}}{2}.$$

COROLLARIUM 4

310. Sin vero angulus, quem curva AT' in A cum AP facit sit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curvae AM tangens erit horizontalis, sive b fit $= 0$ sive secus.

COROLLARIUM 5

311. Si celeritas in A est $= 0$ et in principio A curva AM cum curva, cuius aequatio est $t = ax^n$ existente n numero crescente x quoque t crescat, erit

$$dt = anx^{n-1}dx \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx \sqrt{(a^2gn^2x^{2n-1} - 4ax)}}{2\sqrt{ax^n}}$$

Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = 0$, debet esse $n > 1$ quibus casibus scilicet curva AT' in A est normalis ad AP in puncto A

$$dy = \frac{ndx \sqrt{ag}}{2x^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{nx^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{ag}}{n+1}$$

et radius osculi curvae AM in A

$$= \frac{n^2 ag x^n}{2(n-1)}.$$

Ex quo sequitur curvae AM , cuius tangens in A est horizontalis, osculi in A debere esse infinite parvum, si corpus ex quiete super ascendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite parvus, perpetuo in A quiescens permanebit.

COROLLARIUM 6

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A , quo curva fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$, saltem in initio curvae. Quare si ponatur

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p dx,$$

ubi p est quantitas affirmativa, saltem nisi x ponatur nimis magnus.

$$\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int p dx,$$

ubi $\int p dx$ ita accipi debet, ut evanescat facto $x = 0$. Hoc autem valor $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituito prodibit

$$\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p dx \quad \text{seu} \quad s = x + \int p dx \sqrt{gx}$$

pro curva quaesita AM . Vel inter x et y haec habebitur aequatio

$$y = \int dx \sqrt{(2p\sqrt{gx} + gppx)}.$$

Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int p dx$ scripto modo acceptum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 7

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmativum retineat, quamdiu curvam AM descendere; si fit $p = 0$ et deinceps negativum, curvam ibi habebit cuspidem et revertetur sursum. Si $p = \infty$ manente $\int p dx$ finito, curva AM ibi habebit tangentem horizontalem.

COROLLARIUM 8

314. Si b non ponatur $= 0$, ex eadem curva AT innumerabiles poterunt curvae AM ; prout enim celeritas initialis maior minorque alia prodit curva AM .

SCHOLIUM

315. Problematis huius maximus erit usus in solutionibus problematum indeterminatorum, in quibus omnes curvae requiruntur quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curvam veniat. Ilanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius in quo iis in sequentibus uti liceat.

PROPOSITIO 35

PROBLEMA

316. Posita potentia sollicitante uniformi g et deorsum directa in curvas AMC (Fig. 40), super quibus corpus in A ex quiete descensu dato tempore ad rectam horizontalem BC perveniat.

SOLUTIO

Ponatur $AP = x$, $PM = y$ ob $AB = a$. In curva AND ponatur supra sumtam quantitatem $\int p dx$, cuius curvae hanc debet esse naturam ut in A cum axe AB concurrat, eademque continua usque ad D saltem extendatur, scilicet $p dx$ sit affirmativum. Nunc

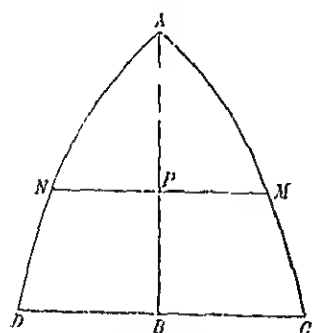


Fig. 40.

$$y = \int dx \sqrt{2p \sqrt{g x} + g p^2}$$

erit tempus per AMC

$$= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + BD$$

(§ 312). Quamobrem cum infinitae curvae huius indolis in locum D substitui queant, ex iis infinitae orientur curvae AMC , super quibus

debebit esse $2ax + \frac{Vb}{a} = aa$ affirmativum. Quare oportet esse
ponatur ideo $Vb = aa^2 + aaf$, erit $a = \frac{Vb}{a^2 + af}$. Quo substituto

$$z = \frac{x^2 Vb + fx Vb}{a^2 + af},$$

quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affi-
nitas dat curvas AND . Fiet autem

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x Vb + f Vb}{a^2 + af} \quad \text{et} \quad p Vgx = \frac{2x Vgbx + f Vgbx}{a^2 + af},$$

ex qua patet omnes hinc orientes curvas AMC tangere rectan-
Aequatio vero pro curvis AMC erit haec

$$y = \int \frac{dx}{a^2 + af} V(2a(a + f)(2x + f)Vgbx + gbx(2x + f)^2).$$

Quae infinitas continet curvas problemati satisfacientes, super quibus
tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2Vga}{g} + Vb$.

COROLLARIUM 3

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum

$$\frac{ds}{Vgx} = \frac{dx}{Vgx} + p dx,$$

erit

$$s = x + \int p dx Vgx.$$

Est vero

$$\int p dx Vgx = \frac{\frac{4}{5} x^2 Vgbx + \frac{2}{3} fx Vgbx}{a^2 + af}.$$

Unde tota curva AMC erit

$$= a + \frac{\left(\frac{4}{5} a + \frac{2}{3} f\right) Vgab}{a + f}.$$

COROLLARIUM 4

2. Inter has igitur curvas AMC longissima prodit, si $f=0$; erit
um

$$AMC = a + \frac{4}{5} \sqrt[5]{gab}.$$

hac erit aequatio ista

$$y = \int \frac{2dx}{a^2} \sqrt[5]{(a^2x \sqrt[5]{gbx} + gbx^2)}.$$

ma vero habetur facto $f=\infty$; tum enim erit

$$AMC = a + \frac{2}{3} \sqrt[3]{gab}.$$

atio pro hac curva erit

$$y = \int \frac{dx}{a} \sqrt[3]{(2a \sqrt[3]{gbx} + gbx)}.$$

SCHOLION 2

3. Omnes curvae AND sub aequatione

$$z = \frac{x^2 \sqrt{b} + fx \sqrt{b}}{a^2 + af}$$

no sunt parabolae, adeo ut per solas parabolae innumerabiles inventae
rvae problemati satisfaciunt. Neque vero omnes parabolae in hac
one continentur, sed loco illius aequationis si adhibeatur haec

$$z^2 + z \sqrt{f} = \frac{x(b + \sqrt{bf})}{a},$$

iam infinitas parabolae continet, iterum infinitas curvae AMC inve-
, super quibus corpus dato tempore descensum absolvit. Ex quo
potest, quoties infinitae inveniri queant curvae AMC , si tantum
s conicae in locum curvae AND substituantur. Sumta enim pro
 AND hac aequatione

$$z^2 + az = \beta x^2 + \gamma x + \delta xz,$$

quo omnes continet sectiones conicas per punctum A trans-

$$b + a\sqrt{b} = \beta a^3 + \gamma a + \delta a\sqrt{b}$$

atque

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\beta a + \gamma + \delta\sqrt{b}}{a + 2\sqrt{b} + \delta a}$$

debent esse quantitates positivae; quod quam infinitis modis facile perspicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae conpostmodum quoque curvae transcendentes simul, maxime simul descriptarum concipi poterit.

EXEMPLUM 2

324. Sumatur pro curva AND haec aequatio generalis.

$$z = \frac{x^n\sqrt{b}}{a^n}$$

denotante n numerum affirmativum quemcumque; avanzest fietque $z = \sqrt{b}$ posito $x = a$, ut requiratur; praeterea vero q

$$\frac{dz}{dx} = \frac{nx^{n-1}\sqrt{b}}{a^n}$$

quantitas affirmativa. Cum igitur sit

$$p\sqrt{gx} = \frac{nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{a^n},$$

erit

$$y = \int \frac{dx}{a^n} \sqrt{(2na^n x^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb} + n^2 g b a x^{n+1})}.$$

Quae aequatio infinitas curvas AMC complectitur, quae omnes sunt conicabiles. Erit enim

$$AM = x + \frac{2nx^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{gb}}{(2n+1)a^n}$$

ideoque

$$AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}.$$

COROLLARIUM 5

fuertit $n = \frac{1}{2}$, erit

$$y = \int dx \sqrt[4]{(gb + 4\sqrt{gab})} \quad \text{atque} \quad y = x \sqrt[4]{(gb + 4\sqrt{gab})} \\ 2\sqrt{a}$$

$$AM = x \left(1 + \frac{\sqrt[4]{gab}}{2a} \right).$$

abit in lineam rectam inclinatam, super qua descensus fit tempore $\sqrt[4]{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breviores recta hac inclinata, s corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC pervenit; facto linea AMC fit brevior.

SCHOLION 3

terum si detur unica curva AND desideratam curvam AMC e ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inveniri. Data enim unica inter z et x capiatur

$$PN = \frac{(ma - (m-1)x)z}{a},$$

diverso ipsius m valore innumerabiles curvae orientur. Simili etiam potest

$$PN = \frac{(max^n - (m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}};$$

$N = z = \sqrt[4]{b}$, si ponatur $x = a$. Atque generaliter, si fuerit P eunque ipsarum x et z , A vero eadem functio, quae prodit facto $z = \sqrt[4]{b}$, accipi poterit

$$PN = \frac{Pz}{A}.$$

em P talis esse functio, ut Pz evanescat facto $x = 0$ et $z = 0$, et visum per dx debet esse quantitas affirmativa, saltem quamdiu est

SCHOLIUM 4

327. Simili modo problema generalissime solvetur, si ducatur quaecunque functionem ipsius x evanescentem, si est $x = 0$, et non evanescentem, in quam abit P , si sit $x = a$, sumatur

$$z = \frac{P\sqrt{h}}{A}$$

pro generalissima aequatione curvae AND . Sit deinde dP quaecunque esse quantitas affirmativa, quamdiu x non superat a ; erit p =

$$y = \int_A^{dx} \sqrt{(2AQ\sqrt{gbx} + gbQQx)},$$

quae est generalissima aequatio pro curvis AMC , quae descendente proposito tempore absolventur. Apparet hoc tempore ascendentes quoque in locum curvarum AND substitui posse. tempus, quo quaecunque curvae AMC portio absolvitur, algebrice definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur = R , erit

$$y = \int_A^{dx} \sqrt{(2AR + RR)}.$$

Sumta ergo loco R quaecunque functione ipsius x ad integrandum debet $\frac{Rdx}{\sqrt{gbx}}$, ita ut evanescent posito $x = 0$; deinde posito $x = a$ et quod provenit, erit = A . Hic vero hoc tantum est modum sumatur quantitas affirmativa, quamdiu x non excedit a , et \int_A^{Rdx} fiat infinitum, si praescripto modo accipiantur.

PROPOSITIO 36

PROBLEMA

328. Posita potentia sollicitante uniformi g et ubique deorsum nire omnes curvas AMC (Fig. 41, p. 139), super quibus corpore ad rectam BC ad horizontem utcumque inclinatum descen-

SOLUTIO

Exprimat curvae AND applicata BD tempus, quo corpus ad rectam BC pertingit, et ducta per quodvis punctum M in

atae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus
 rps partem AM percurrit. Quare si infinitae curvae AND con
 r, quae omnes in B eandem
 applicatam BD , hae omnes
 unt curvas AMC , super quibus
 dato tempore ab A ad rectam
 rvenit. Curvae autem AND , ut
 onitum, concurrere debent in A
 rticali AB et usquo ad D diver
 bent ab AB . Ponatur nunc tan
 guli $ABC = k$ sitque $AP = x$,
 $PQ = y$, $AQ = u$, $QN = t$ et $AB = a$;
 $Q = \frac{y}{k}$ ideoque

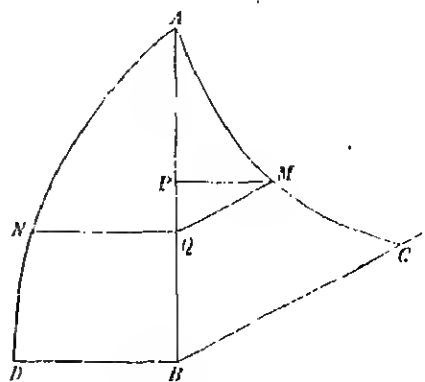


Fig. 41.

$$x + \frac{y}{k} = u.$$

toni celeritas in M debita est altitudini gx , erit tempus per AM

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

equale esso debet ipsi $QN = t$; erit adeo

$$dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}} \quad \text{et} \quad gxd t^2 = dx^2 + dy^2.$$

curvam AND datam dabitur t in u , et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$, dabitur
 et y ; quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curva quaesita.
 Vel cum sit $y = ku - kx$, erit

$$gxd t^2 = (k^2 + 1)dx^2 - 2k^2 du dx + k^2 du^2,$$

aequationo x per u invenire licebit. Sit ad hoc $dt = pdu$, erit

$$gxp^2 du^2 = (k^2 + 1)dx^2 - 2k^2 du dx + k^2 du^2$$

$$dx = \frac{k^2 du \pm \sqrt{(g(k^2 + 1)p^2 x - k^2) du^2}}{k^2 + 1}.$$

gitur AND talis accipi debet, ut ubique p minus sit quam

$$\frac{k}{\sqrt{gx(k^2 + 1)}}.$$

Aequatio illa autem ita debet integrari, ut facto $u = 0$ fiat quoque eruatür aequatio inter x et y pro curva quaesita.

COROLLARIUM 1

329. Curva AMC tanget in A rectam AB , si fit dy tum vero debet esse $du = dx$ atque $t = \sqrt{g(k^2 + 1)p^2}$, eveniet, si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x = 0$. Quia autem hoc p minor quam x , erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur in A tangere verticalem AB , si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito u

COROLLARIUM 2

330. Deinde curva AMC normalis erit in Q M , si fuerit $dx = k dy = k^2 du = k^2 dx$ sive $dx = \frac{k^2 du}{k^2 + 1}$. Hoc vero

$$p^2 x = \frac{k}{g(k^2 + 1)}.$$

COROLLARIUM 3

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum maiorem quam $\frac{k}{g(k^2 + 1)}$ habebit facto $x = 0$ vel infinito magis casu erit $dx = +\infty du$, et cum sit $du = dx + \frac{dy}{k}$, erit dy casibus tangens curvae AMC in A parallela erit rectae AB .

EXEMPLUM

332. Sit curva AND parabola quaecumque, ita ut sit

$$t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{g}};$$

erit

$$dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}} \quad \text{et} \quad p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}},$$

nudo habebitur ista aequatio

$$(k^2 + 1)dx = k^2 du = + \frac{du \sqrt{(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2)}}{\sqrt{u}}$$

quationis integralis est

$$\pm V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) + A\sqrt{u})^n (\pm V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) + B\sqrt{u})^q$$

$$A = \frac{\alpha^2 + V(\alpha^4 - 4(1 - \alpha^2)k^2)}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\alpha^2 - V(\alpha^4 - 4(1 - \alpha^2)k^2)}{2}$$

$$\pi = \frac{-2A}{A-B} \quad \text{atque} \quad \varrho = \frac{2B}{A-B}.$$

est $\alpha < 1$, fit B et hinc quoque ϱ numerus positivus.] Cum igitur π negativus, erit

$$(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) + B\sqrt{u})^q,$$

notat constantem, quae efficiat, ut posito $x=0$ fiat $u=0$. Manifestum est, quaecunque fuerit constans, semper fieri $u=0$ posito accepto casu, quo ϱ vel π evanescit. At π evanescere non potest, evanescit casu, quo $\alpha=1$; hoc igitur casu debet esse $C=\infty$ fietque

$$\pm V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) + \alpha^2\sqrt{u} = 0$$

et $y=0$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB . Reliquis pro ob C arbitrariam quantitatem ex unica curva AND innumeratione AMC inveniuntur.

us porro casus est seorsim tractandus, si $A=B$ son

$$k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)};$$

erit

$$lu = C - 2l\left(r \mp \frac{\alpha^2}{2}\right) \pm \frac{\alpha^2}{r \mp \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$r = \frac{V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}{\sqrt{u}}.$$

ter pro hoc casu habebitur haec aequatio

$$= 2l\left(V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}\right) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{V(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}},$$

quo determinatione non opus habet.

Si est $\alpha > 1$, fit B et hinc quoque q numerus negativus; esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel

$$AVu = V(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2u)$$

vel

$$BVu = V(\alpha^2(k^2 + 1)x - k^2u).$$

Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinantibus haeque etiam generaliter satisfaciunt. Ut si fit $A = 1$ et $B = 0$ hincque hae aequationes

$$u = x \quad \text{sen} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{(k^2 + 1)x}{kk} - x + \frac{y}{k} \quad \text{non}$$

quae est linea recta perpendicularis in BC ; haec enim a corpore percurritur quo verticalis AB .

COROLLARIUM 4

332[a] ¹⁾. Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerales veniuntur problemati satisfaciens; quae ergo omnes minores sunt quam perpendicularis AB .

COROLLARIUM 5

333. Cum ergo ex unica curva AND infinitae oriri quae facile intelligitur infinites plures curvas hinc questioni praecedenti.

COROLLARIUM 6

334. Si $\alpha < 1$, effici potest determinanda constante C , ut per datum punctum rectae BC transcat. Deinde aliis as AND simili modo infinitae curvae poterunt inveniri, quae non solum dato tempore ad rectam BC perveniunt, sed ad punctum datum C .

SCHOLIUM 1

335. In hoc exemplo casus, quo $\alpha = 1$, his occurrit; linea recta verticalis tantum satisfaciens est inventa, alia

1) Editio princeps falso pro numero 333 iterat numerum 332.

rectam alia inclinata, utroque tamen modo eadem aequatione generari possunt. Saepius autem iam huiusmodi casus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in se aequationes integrales, quae nihilominus integrationes non erantur. Ut in casu $\alpha \approx 1$ haec habetur aequatione differentialis

$$\frac{(k^2 + 1)dx - k^2 du}{V((k^2 + 1)x - k^2 u)} = \frac{\pm du}{Vu},$$

integrata dat $x = u$. Interim tamen perspicuum est hanc aequationem $= (k^2 + 1)x$ in illa quoque contineri, etiamsi per integrationem non potest. Et hanc ob rem posterior aequatio integralis aequo satisfacit ac $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem

$$\frac{dt}{T} = Vdu,$$

in qua T est talis functio ipsius t , quae evanescat posito $t = 0$, et V functio quaecunque ipsius u , aequo comprehendere hanc integralem $t = 0$ ac hanc

$$\int \frac{dt}{T} = \int Vdu,$$

quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t = 0$, si t est simplex quantitas, negligi potest; at si t est quantitas composita in utro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus § 30 in aequatione

$$ds = \frac{-dx \sqrt{b}}{V(a^2b - bx^2 - a^2 \int P dx)},$$

in qua observavimus aequationem $x = a$ in ea contineri, etiamsi integratio quidem possit perfici. Nam posito $a - x = t$ erit $-dx = dt$ et

$$V(a^2b - bx^2 - a^2 \int P dx)$$

in qua functio ipsius t , quae fit $= 0$, si fit $t = 0$ seu $x = a$; namque $\int P dx$ accipi iubebatur, ut evanescat posito $x = a$. Posita ergo hac ipsius t functio $= T$ erit

$$ds = \frac{dt \sqrt{b}}{T},$$

ex qua aequatione ergo tuto concludi licet satisfacere aequationi $x=a$ ideoque problemati illi satisfacere circumum, ut ibi. Magis universaliter vero in hac aequatione $Vdu = \frac{dt}{T}$, si posito $t=0$, comprehendetur ista aequatio $T=0$, exstanti quantitati ideoque $dt=0$. Unde intelligitur $T=0$ tione proposita $Vdu = \frac{dt}{T}$. Atque hinc, si t fuerit quantitas ex u et x , statim habetur aequatio integralis per integrandum

SCHOLIUM 2

336. Casus hic superest, qui peculiarem resolutionem recta BC supra punctum A cum BA concurrat et quae. Considerabimus autem sequente problemate tantum casum parallelam verticali AB et in data distantia positam; ex quo rectae BC utcumque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37

PROBLEMA

337. Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g ; numerabiles, super quibus corpus ex A (Fig. 42) motum a quo tempore ad rectam verticalem EC perveniat.

SOLUTIO

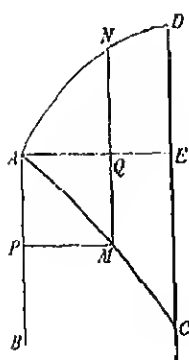


Fig. 42.

Sit AMC curva quaecumque quae axi sumatur recta verticalis AB ; $PM = AQ = y$; erit celeritas in M et tempus per AM

$$= \int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{gx}}$$

Sit porro AND curva, cuius quaecumque primat tempus per AM , et sit $QN = t$ petorit ex curva AND data curva AM si infinitae curvae AND concipiuntur

E communem habeant applicatam DE , omnes producent curvas A per quibus corpus dato tempore per DE expresso ex A ad CE pervenit itaque

$$t = \int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{gx}}$$

posito $dt = p dy$ erit

$$gp^2 x dy^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{atque} \quad dx = dy \sqrt{gp^2 x - 1}.$$

hanc ita integrata, ut posito $x = 0$ fiat $y = 0$, dabit curvas AMC quae per R functio quaecunque ipsius y et $\int R dy$ ita capiatur, ut evanescat $y = 0$. Tum fiat $\int R dy = A$ posito $y = AE = a$ et existat $E = \sqrt{b}$ sumatur

$$t = \frac{\sqrt{b} \int R dy}{A};$$

et

$$p = \frac{R \sqrt{b}}{A} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{dy}{A} \sqrt{gb R^2 x - A^2}.$$

hanc aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curvas quas satisfacientes. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R = 1$; tum aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y \sqrt{b}}{a}$ ob $A = a$. Hanc ob rationem

$$\frac{a dx}{\sqrt{gbx - a^2}} = dy \quad \text{atque} \quad \frac{2a}{gb} \sqrt{gbx - a^2} = y.$$

hanc autem nullius est utilitatis ob valorem ipsius y imaginarium.

COROLLARIUM 2

339. Quia autem $\sqrt{gb R^2 x - A^2}$ non potest esse quantitas imaginaria, oportet sit $R^2 x > \frac{A^2}{gb}$, etiamsi $x = 0$. Quare R neque quantitas constans potest neque functio ipsius y , quo evanescat facto $y = 0$. Hanc ob rationem esse debet functio ipsius y , quo fiat $= \infty$, si ponatur $y = 0$. Praeterea non eiusmodi esse debet, ut $\int R dy$ non fiat infinitum, quod eveniret si $R = \frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$, etc.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$; erit

$$\int R dy = 2\sqrt{y} \quad \text{et} \quad A = 2\sqrt{a}.$$

Hinc habebitur ista aequatio

$$2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx - 4ay)}.$$

Quae aequatio quia est homogenea, ponatur $x = qy$; erit

$$2qdy\sqrt{a} + 2y dq\sqrt{a} = dy\sqrt{(gbq - 4a)}$$

seu

$$\frac{dq}{\sqrt{(gbq - 4a)}} = \frac{dy}{2q\sqrt{a}} + \frac{dy}{2y\sqrt{a}}.$$

Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq - 1)} = r$ erit

$$\frac{dy}{y} = \frac{2rdr}{r^2 - n + 1}.$$

Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n = 3$.

Altero vero casu $n > 2$ erit integrale¹⁾

$$ly = lC + \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}} l(2r - n + \sqrt{(n^2 - 4)}) + \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}} l(2r + n).$$

Quae ob

$$r = \frac{\sqrt{(nx - y)}}{\sqrt{y}}$$

abit in hanc

$$\begin{aligned} & C(2\sqrt{(nx - y)} - (n - \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n - \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}} \\ & = (2\sqrt{(nx - y)} - (n + \sqrt{(n^2 - 4)})\sqrt{y})^{\frac{n + \sqrt{(n^2 - 4)}}{\sqrt{(n^2 - 4)}}}. \end{aligned}$$

Ubi pro C constantem quamcumque accipere licet, quia ipsa aequatione comparata, ut posito $x=0$ fiat $y=0$. Per methodum autem supra (§ 335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis

$$2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq - 4a)} \quad \text{seu} \quad 2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbxy - 4ayy)}.$$

1) Editio princeps: Hoc vero casu erit integrale Corroxit P. St.

ritur

$$\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2 b^2 - 64 a^2)}}{8a},$$

ut duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imagi-

casu, quo $n=2$, erit

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2} \quad \text{sen} \quad ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1},$$

et

$$ly = -2l(V(2x-y) - Vy) + 2lVy + \frac{2Vy}{V(2x-y) - Vy} + lC$$

$$l(V(2x-y) - Vy) - lC = \frac{Vy}{V(2x-y) - Vy}.$$

nam pro C quantitatem quancumque accipere licet.

$n < 2$, tam constructio curvae partim a logarithmis, partim a qua-
circuli pendet; sunt enim ob $V(n^2 - 4)$ imaginarium logarithmi in-
imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae ex-
ne analytica.

PROPOSITIO 38

PROBLEMA

1. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curva
que BSC (Fig. 43, p. 148); invenire omnes curvas AMC , super quibus
descendendo ex A dato tempore ad curvam BSC perveniat.*

SOLUTIO

ut curvarum quaesitarum quaecumque AMC , per cuius quodvis punc-
t M ducatur curva MQ similis curvae BSC respectu puncti fixi A , e-
at curvae AND applicata NQ tempus per arcum AM ; exponet org-
ta BD tempus per totam curvam AMC . Quo facto poterit vicissim
a curva AND curva AMC inveniri. Quare si infinitae curvae ANI
antur, quo omnes in B habeant applicatam BD communem, eas ge-

nerabunt infinitas curvas AMC , super quibus omnibus con-
dendo dato tempore per BD expresso ad curvam BSC per-

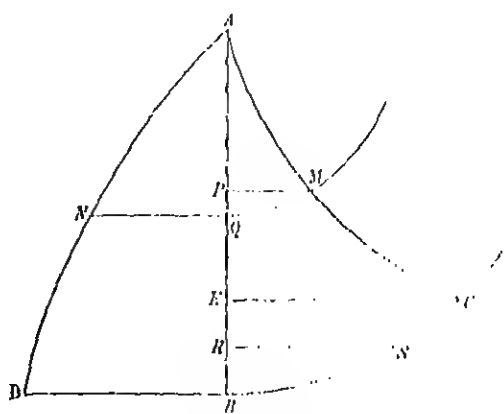


Fig. 4B.

$AB = a$, $BD = \sqrt{b}$ et arcui QM abscindatur arcus similis
 BSC ; erit

$$AQ : AB = PM : RS :: AP : AR :: PQ : RS$$

Ponatur porro $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QN = t$,
dabitur ob curvam BSC datam aequatio inter r et s aliquae
datam dabitur aequatio inter t et u . At ob similitudinem

$$u : a = y : s :: x : r,$$

unde erit

$$y = \frac{us}{a} \quad \text{et} \quad x = \frac{ur}{a}.$$

Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx , ex
 AM erit

$$= \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}},$$

quod aequale poni debet ipsi t ; unde oritur ista aequatio

$$gxdt^2 = dx^2 + dy^2.$$

Quia autem t per u datur, sit $dt = pdu$ et p sit functio in

$$dx = \frac{u dr + r du}{a} \quad \text{et} \quad dy = \frac{u ds + s du}{a}$$

insubit illa aequatio in hanc

$$garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uds + sdu)^2.$$

quia curva *BSC* datur, erit *s* functio ipsius *r* sitque $ds = qdr$ existens
functione ipsius *r* quacumque. His substitutis habebitur aequatio in
r ista

$$garup^2 du^2 = (udr + rdu)^2 + (uqdr + sdu)^2.$$

hac radice quadrata extracta dabitur

$$\frac{dr}{du} = \frac{-r - sq \pm \sqrt{(2rsq - s^2 - r^2 q^2 + garup^2(1 + qp))}}{u(1 + qp)}.$$

ex qua si aequatio inter *r* et *u* inveniat, inde habebitur simul aequatio
inter *x* et *y* pro curva quaesita.

Quod autem ad curvam *AND* attinet, sit *P* functio quaecumque ipsius
 $\int Pdu$ ita integratum, ut evanescat facto $u = 0$ et fiat $= A$ posito $u = 0$
sumatur

$$t = \frac{\sqrt{b} \int Pdu}{A}$$

pro aequatione curvae *AND*. Erit ergo

$$p = \frac{P\sqrt{b}}{A},$$

ubi pro *P* functionem quamvis ipsius *u* ponere licet. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

342. Si *u* ponatur $= 0$, eo ipso quoque *x* et *y* evanescent, nisi
sit *r* vel *s* infinitum. Illo igitur casu in integratione aequationis differentialis
inventae constantem quancumque addere licet, quia non opus est
datum habeat valorem, si *u* sit $= 0$.

COROLLARIUM 2

343. Tum igitur ob constantem arbitrariam addendam ex unica
AND data innumerabiles inveniuntur curvae *AMC* quaesito satisfaciendo

COROLLARIUM 3

344. Si curva *BSC* ita est comparata, ut nusquam neque *r* neque
s erit quaeat infinite magnum, semper unica curva *AND* infinitas dabit

quaesitas AMC . Quae non solum hanc habebunt proprietatem super iis descenduntia simul ad datam BSC perveniunt, sed ad quamvis datae similem curvam QM pertingent.

COROLLARIUM 4

345. Cum igitur in integratione aequationis inventa curvae addere liceat, ea ita poterit assumi, ut curva AMC etiam C curvae datae BSC dirigatur. Hocquo modo inveniuntur, quae omnes in dato puncto C conveniunt.

SCHOLIUM 1

346. Posuimus curvas QM similes curvae BSC , et erecta fiat infinite parva et omnia puncta curvae BSC et x et y evanescant posito $u = 0$. Potuissimus autem eodem modo vel cum BSC congruentes ponere vel discrepantes legere. Si igitur functio ipsius u quaecumque evanescentis posito $u = 0$ fiat $u = a$, curva QM ita pendere poterit a curva BSC , ut

$$x = \frac{Qr}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{Qs}{B};$$

namque facto $u = a$ curva QM transibit in ipsam BSC et etiam transibit, nisi curva BSC in infinitum progrediatur pro Q talis accipi poterit functio, ut, etiamsi fiat $r = 0$ fiat $= 0$, si $u = 0$. Posito autem $dQ = Vdu$ habebitur sequens

$$Qdr(1 + qq) + Vdu(r + sq) = du \sqrt{(g^2 B P^2 Q r (1 + qq) + 1^2)}$$

Quae aequatio latissime patet et ex unica curva AMC curvas AMC suggeret, quin etiam infinitas suppeditat punctum C transeunt.

SCHOLIUM 2

347. Quantumvis generalis aequatio est haec aequatio est similis curvae BSC , quin est $x:y = r:s$. Quare ad

hiberi, in qua curvae QM utcumque dissimiles ponuntur curvae
 smodi tamen, ut QM in BSC abeant facto $u = a$. Obtinebitur
 solutio, si R sumatur functio quaecumque ipsius u evanescens facto
 atque R in D posito $u = a$ sitque $dR = Wdu$. Sumatur enim

$$x = \frac{Qr}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{Rs}{D};$$

in x et y in s , si fiat $u = a$, atque evanescento u tam x quam y
 t, quicquid sit x . Hinc autem sequens orietur aequatio generalissima

$$dr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) + du(D^2QVr + B^2RWys) \\ + du \sqrt{\left(gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2 + B^2R^2q^2) - B^2D^2(RVqr - QWs)^2\right)}.$$

Equatione loco dr introduci potest ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr , vel etiam
 terit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$ et tunc habebitur
 inter u et x . Notandum autem est, quia Q evanescit facto $u = 0$,
 esse debere functionem ipsius u , ut P^2Q posito $u = 0$ vel fiat quan-
 ta vel infinito magna; at tunc cavendum est, ne $\int Pdu$ debito
 tantum fiat infinite magnum.

COROLLARIUM 5

Aequatio in solutione inventa fit separabilis, si fuerit $P = \frac{1}{\sqrt{u}}$; erit
 et $p = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$. Habebitur enim

$$\frac{du}{u} = \dots \dots \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{4}(1+qq) - (s-rq)^2\right)}};$$

nam s et q per r .

COROLLARIUM 6

Simili modo aequatio scholii 1 separationem admittet, si fuerit

$$P^2Q = V^2 \quad \text{scilicet} \quad P = \frac{V}{\sqrt{Q}}.$$

Habebitur enim

$$-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{g^{br}(1+qq)}{AA} - (s-rq)^2\right)} = \frac{Vdu}{Q} = \frac{dQ}{Q},$$

in qua indeterminatae u et r sunt a se invicem separatae.

EXEMPLUM 1

350. Manente $P^2Q = V^2$ son $\int Pdu = 2VQ$ ob $Vdu = dQ$,
 $u = a$ $A = 2VB$. Unde fit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{g^{br}(1+qq)}{A} - (s-rq)^2\right)}}.$$

Habebit ergo $\int Pdu$ requisitam proprietatem, ut evanescat facto $u = a$.
 nescit enim Q . Sit nunc curva BSC circulus super diametro AB
 tus; erit

$$s = V(ar - r^2) \quad \text{ob} \quad q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$$

atque

$$1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)};$$

his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2V(ar-r^2) \pm V(gb-r^2))\sqrt{(ar-r^2)}}.$$

Quae aequatio non solum indeterminatas a se invicem habet separatas
 etiam generaliter per logarithmos integrari potest; potest enim in a

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(2ar+2r^2 \pm r\sqrt{(gb-r^2)})(a-r)}$$

membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec

$$lQ = \frac{4a}{4a-gb} l \frac{2V(a-r) \mp V(gb-r^2)}{\sqrt{r}} \pm \frac{Vab}{4a-gb} l \frac{V(a-gb-r^2) + Vgb(a-r)}{V(a-gb-r^2) \cdot Vgb(a-r)}$$

hic convenit casum, quo

$$gb = 4a \quad \text{sen} \quad Vb = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}},$$

ous per quamvis curvam AMC aequale ponitur tempori descensus in verticalem AB ; tunc enim erit

$$\frac{dQ}{Q} = -2(ar - r^2) \pm 2(\overline{ar - r^2})$$

signum \pm valeat, erit $dr = 0$ et $r = \text{const.} = c$, unde fit

$$s = V(ac - c^2)$$

$$x : y = Vc : V(a - c) \quad \text{sen} \quad y Vc = x V(a - c),$$

ratio omnes dat chordas in hoc semicirculo ex A ductas, quemadmodum demonstravimus [§ 102] tempora per singulas chordas esse inter se. Valeat signum $-$, erit

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{adr}{ar - r^2}$$

$$Q^{-1} = \frac{C^{-1}r}{a - r} \quad \text{sen} \quad \frac{r}{a - r} = \frac{C^4}{Q^4}.$$

$$Q = C \sqrt[4]{\frac{a - r}{r}}$$

$s = V(ar - r^2)$ habebitur

$$x = \frac{Cr}{B} \sqrt[4]{\frac{a - r}{r}} \quad \text{et} \quad y = \frac{C}{B} \sqrt[4]{r(a - r)^3};$$

ergo r prodibit ista aequatio (posito $\frac{C}{B} = m$)

$$y^2 + x^2 = ma \sqrt[4]{xy}.$$

curvae hanc habent proprietatem, ut arcus earum a semicirculo absolvantur descendendo eodem tempore, eo scilicet tempore, quo semicirculi chordae percurruntur.

Etiam Opera omnia II₂ Mechanica

COROLLARIUM 7

351. Huius autem curvae, cuius aequatio

$$y^2 + x^2 = ma \sqrt{xy},$$

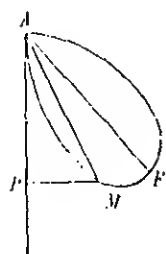


Fig. 44.

figura est AMF (Fig. 44); habet nimirum cum verticali AP angulum semirectum et A nodum. At vero omnes hae curvae sunt et omnes ad omnes circulos accommodari

COROLLARIUM 8

352. Si ergo in hac curva sumatur quodcumque punctum et A circulus transiens concipiatur centrum habens in vertice arcum AM eodem tempore percurrent, quo diametrum circuli AM . Quare haec curva hanc habet proprietatem, ut quod corpus ex A descendente absolvat eodem tempore, quo

COROLLARIUM 9

353. Hoc ergo casu, quo $P^2Q = V^2$ [§ 349], perinde est sive secus; eadem enim prodit aequatio inter x et y , unde hoc quam ex aequatione intelligitur.

EXEMPLUM 2

354. Manente $P^2Q = V^2$, ut sit

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{y^2}{x} + (1+qq) \cdot (s-rq)^2\right)}},$$

sit curva BSC circulus centro A radio $AB = a$ descriptus;

et
$$s = \sqrt{(a^2 - r^2)}$$

$$q = \frac{-r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} \quad \text{atque} \quad 1 + qq = \frac{a^2}{a^2 - r^2}.$$

substitutis prodibit sequens aequatio

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\pm a dr}{V\left(\frac{gbr}{4} - a^2\right)(a^2 - r^2)},$$

maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a . Hinc ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo

$$\frac{gbr}{4} = a^2 \quad \text{seu} \quad r = \frac{4a^2}{gb},$$

u erit

$$s = \frac{a\sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)}}{gb}.$$

it

$$x : y = 4a : \sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(g^2b^2 - 16a^2)}}{4a},$$

et tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore \sqrt{b} ad diam pervenit, cum vorticali AB . Curvae praeterea algebraicae non quia formula differentialis non officii potest rationalis.

EXEMPLUM 3

Sumta aequatione generalissima ex § 347 ponatur linea BSC recta alis; fiet $r = a$ et $dr = 0$. Hanc ob rem loco dr introducatur $\frac{ds}{q}$, ubi q erit infinite magnum. Delebis ergo terminis, qui praec q ant, proveniet ista aequatio

$$ABRds + ABWsd u = \frac{1}{2} Ddu \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}.$$

aequatio ob $Wdu = dR$ et P , Q et V data per u integrationem ad. Erit nempe

$$\frac{ABRs}{D} = C \pm \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}.$$

aequatione ergo invenitur s . Deinde, cum sit $y = \frac{Rs}{D}$, ut y evanescere facto $u = 0$, debet esse $C = 0$, si quidem integrato

$$\int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2V^2)}$$

$$x = \frac{Qa}{B} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pm 1}{AB} \int du \sqrt{(gBabP^2Q - A^2a^2)}$$

Quae est aequatio generalis pro omnibus curvis, super quae
ad horizontalem datam descendit.

EXEMPLUM 4

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (§
linea *BSC* recta verticalis parallela ipsi *AB* et ad distantiam
erit $s = f$ et $q = 0$. Quare habebitur ista aequatio

$$ADQdr + ADrdQ = \pm du \sqrt{(gB.D^2bP^2Qr - A^2B^2)}$$

Cum autem sit $Qr = Bx$, hoc substituto prodibit

$$ADdx = \pm du \sqrt{(gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)},$$

unde invento x erit

$$y = \frac{fR}{D}.$$

At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt ita
ratae, non multum ex ea derivare licet.

SCHOLION 3

357. Ex generali huius problematis solutione, quando uni
infinitas dat curvas *AMC*, colligere licet solutionem huius pr
infinitae requiruntur curvae, super quibus omnibus corpus o
punctum pervenit. Quaelibet enim curva *AND* unam dabi
datum punctum curvae *BSC* transeuntom hocque modo innum
modi curvae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis
et operosa, aliam genuinam magis afferre convenit. Modus autem
ita est comparatus, ut unam curvam iam nosso oporteat, ex q
biles deducere docebimus. Haec ergo curva, quae nota esse de
utra traditarum methodo eliciatur, ut ex § 350, ubi curva per
tum semicirculi transiens inveniri potest dato tempore describer

PROPOSITIO 39

PROBLEMA

Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi g dataque sit curva (fig. 45), super qua corpus ex A ad punctum datum C pervenit; invenire curvas ANC , super quibus corpus eodem tempore ad punctum C ex A

SOLUTION

Fig. 45.

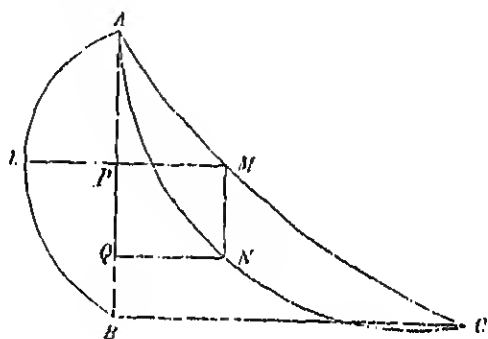


Fig. 45.

nuntur. Intelligitur autem ex curva ALB inveniri posse curvam quare si infinitas huiusmodi curvae ALB concipiantur in A et B in AB , earum quaeque dabit curvam ANC hocque modo innumera-
 odibunt curvae ANC quaesito satisficientes. Sit nunc $PI = r$; erit r
 quaedam ipsius $AP = t$; curvae autem ANC ponatur abscissa $AQ = x$
 $= y$. His positis erit

$$MN = \frac{1}{2}((x - t)^2 + (u - y)^2) = r$$

$$y = u + \sqrt{r^2 - (x - t)^2}.$$

quia tempus per MM aequale ponitur temporis per AN , orit

$$\int \frac{V(\sqrt{dt^2 + du^2})}{Vgt} = \int \frac{V(dx^2 + dy^2)}{Vgx}$$

$$x dt^2 + x da^2 = - t dx^2 + t dy^2.$$

Est autem

$$dy = du \pm \frac{(rdr - xdx + tdx + xdt - tdt)}{\sqrt{(r^2 - (x - t)^2)}}$$

Sit $du = pdt$ et $dr = qdt$; erunt r , p et q functiones ipsius t ; brevitatis gratia $x - t = z$ seu $x = t + z$; erit

$$dy = pdt \pm \frac{qrdt - zds}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$$

et

$$dy^2 + dz^2 = p^2 dt^2 + dt^2 + 2dt dz + dz^2 \pm \frac{2pqr dt^2 - 2pz dt dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} + \frac{q^2 r^2 dt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$$

Hinc obtinetur ista aequatio

$$\frac{t^2 dz^2}{r^2 - z^2} = \frac{2tqrz dt dz - tq^2 r^2 dt^2}{r^2 - z^2} \pm \frac{2pzt dt dz - 2pqtr dt^2}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - 2t dt dz$$

ex qua z et t determinentur; habebitur aequatio inter x et t , cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi. Ita posito $t = 0$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaerenda posito $t = 0$ et Q sit etiam talis functio evanescens posito $t = a$; poterit ergo poni $r = I$ abeat vero Q in A , si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = I$ valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur curvis quaesitis. Q. E. I.

SCHOLION 1

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur, aequatio inventa ad absurdum deducere debet, ut si curva brevissimi descensus, quo casu non dari potest alia descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum videtur de lineis celerrimi descensus tractare eaque problemata quibus inter omnes curvas vel eiusdem longitudinis vel aliam communem habentes ea quaeritur, quae minime tempore a tempore, ea sit inveniendae, quae data quapiam proprietate

enim difficillimum sit omnes lineas idem descensus tempus habentes tamen ex iis quaelibet potest inveniri ex proprietate, quam praeter omnibus possidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam isoperimetricarum, quam ut passim expositam hic non explicabimus.

SCHOLIUM 2

Huius autem problematis solutio per § 338 sequenti modo habetur.

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qg)}{r-sq \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{1} (1+qg) - (s-rq)^2\right)}}$$

cum C (Fig. 43, p. 148), ad quod omnes curvae convenire debent, ponatur $E=f$ et $EC=h$; si ergo sit $r=f$, fieri debet $s=h$. Ad hoc sit S naecunque ipsius r , quae abeat in F posito $r=f$, quo facto ponatur

$$s = \frac{Sh}{F}.$$

tur hic valor in superiore aequatione eaque ita integretur, ut posito $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas quaesitae AMC , nempe $AP=x$ et $PM=y$, ex eo, quod est

$$x = \frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{us}{a}.$$

bitrarius valor ipsius S dabit infinitas curvas AMC puncta A et C et super quibus corpus descendens tempore dato $= \sqrt{b}$ perveniet C . Sit autem $dS = Tdr$; erit $g = \frac{hT}{F}$, atque

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + h^2T^2)}{r^2r - h^2ST \pm \sqrt{\left(\frac{gbr}{1} (F^2 + h^2T^2) - (FhS - FhTr)^2\right)}}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2 + h^2T^2)}{r^2r - h^2ST \pm F\sqrt{\left(\frac{gbr}{1} (F^2 + h^2T^2) - (hS - hTr)^2\right)}}$$

natio ita integretur, ut posito $u=a$ fiat $r=f$; quo facto ponatur

$$x = \frac{ur}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{hSu}{Fa}.$$

debitur aequatio inter x et y pro infinitis curvis AMC quaesito tempore.

um $n\mu$. Hinc ergo habebitur ista aequatio

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}} + \frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{Mn}{\sqrt{v}} + \frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}} = \frac{1}{\sqrt{(v+du)}} - \frac{ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}},$$

etis centris M et μ arculis mg et nh erit

$$\frac{ng}{\sqrt{v}} = \frac{mh}{\sqrt{(v+du)}} + \frac{n\mu \cdot ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}.$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{du}{2v\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}.$$

neglectis negligendis, substitutis oritur

$$2v(mh - ng) = mh \cdot du - n\mu \cdot ddw = mh \cdot du - Mm \cdot ddw,$$

propter triangula similia nmg , mMG et $n\mu h$, $\mu\mu H$, ut sequitur,

$$ng : mn = mG : mM \quad \text{seu} \quad ng = \frac{mG \cdot mn}{Mm}$$

$$mh : mn = \mu H : m\mu \quad \text{seu} \quad mh = \frac{\mu H \cdot mn}{m\mu}.$$

rem erit

$$2v\left(\frac{\mu H}{m\mu} - \frac{mG}{Mm}\right) = \frac{mG \cdot du}{Mm} - \frac{Mm \cdot ddw}{mn} = 2v \text{ diff. } \frac{mG}{Mm}.$$

Aequatio est homogenea ob determinat naturam curvae AMC *chronae* vocatae, super qua corpus tempore brevissimo ex A ad C Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Si ergo dicatur

$$MG = mH = dx, \quad mG = dy \quad \text{et} \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds,$$

$$H\mu = dy + ddy \quad \text{et} \quad m\mu = ds + dds.$$

et EULERI Opera omnia IIa Mechanica

His substitutis habebitur

$$2vd \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}.$$

In qua si ex potentiis sollicitantibus determinentur v , du aequatio pro curva brachystochrona. At semper ddw in mn ex calculo excedat.

COROLLARIUM 2

363. Sit radius osculi curvae $Mmu = r$; isque i ab axe AP directus erit

$$r = \frac{ds^3}{dxddy};$$

at est

$$d \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}.$$

Quare erit

$$d \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r};$$

hinc prodibit ista aequatio

$$\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}.$$

Ubi notandum est esse $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curva in maiorem ad curvam promitur.

COROLLARIUM 3

364. Si ex potentiis sollicitantibus fluat

$$dv = Pdx + Qdy + Rds,$$

erit

$$du = Pdx + Qdy + Rds \quad \text{et} \quad ddw = Q \cdot mn -$$

quia puncto m in n translato crescit dy particula mn

Quia autem est $ng = \frac{dy \cdot mn}{ds}$, erit

$$\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds},$$

quibus substitutis habebitur ista aequatio

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

SCHOLIUM 1

365. Ex solutione intelligitur formulam inventam latissimo patore atque potentias sollicitantes quascunque extendi, etiam resistentia non excepta, quaecumque enim fuerint potentiae sollicitantes, determinari potest tamquam ddw , qui valores substituti dabunt aequationem pro brachystochrona adata. Attamen haec tantum locum habent, si potentiarum directiones sint in eodem plano; curva enim inventa est in eodem plano sita. Nilominus minus, si potentiae non fuerint in eodem plano, curva brachystochrona dato plano ope formulae huius poterit inveniri. In quolibet enim plano peculiaris erit curva brachystochrona, quaecumque fuerint potentiae sollicitantes. Alia vero quaestio est, si quaeratur linea brachystochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta iungentes, etiam non in uno plano sitas. Quoties vero potentiarum sollicitantium directiones in eodem plano sunt positae, dubium non est lineam brachystochronam in eodem positam esse plano. Nam si curvae non essent in eodem plano, potentiae obliquè agerent, propterea corpus non tantum, quantum fieri potest, accelerarent. Ex intelligitur solutione tam lineam absolute brachystochrona, si potentiarum sollicitantium directiones sunt in eodem plano, invenitur quam lineam, quae in dato plano est brachystochrona, quaecumque fuerint potentiae sollicitantes.

SCHOLIUM 2

366. Quaestionem hanc de linea brachystochrona seu celerrimi descensus lineam produxit Col. Ion. BERNOULLI¹⁾ atque plures eius solutiones extant in Act. Lips. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Paris. ubi, ubi hoc problema tam in hypothesi potentiae sollicitantis deorsum actus quam pro viribus centripetis solutum dederunt²⁾. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemisit, ut

1) ION. BERNOULLI, *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus solutioque problematis in Actis 1696*, p. 269, *propositi de invenienda linea brachystochrona*, Acta erud. 1697, p. 269. *Opera omnia*, Tom. I, p. 187; *Lettre de Mr. JEAN BERNOULLI à Mr. BASNAGE, sur le problème des isopérimètres*, Histoire des Ouvrages des Sçavans, Paris 1697, p. 452; *Opera omnia*, Tom. I, p. 194; *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres*, Mém. de l'Acad. d. sc. de Paris 1718, p. 100; *Opera omnia*, Tom. II, p. 225. P.

2) Vide notum 2 p. 167. P. St.

potentias quascunque et resistendam eadem ratione habentem
omnes $ddw = 0$, quod semper perperam fit, nisi directum
vel mH . Et hanc ob rem GEL. HERMANNUS respicit, dum
brachystochronas in medio resistente inveniendas est. (Petrop.
A. 1727¹⁾); quasque correctas dedi in eisdem Commentariis
ipso problemato.

PROPOSITIO 41

PROBLEMA

367. Si corpus perpetuo deorsum trahatur vi quacunque,
stochronam AMC (Fig. 46, p. 160), super qua corpus citissimum

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = y$ et arcu $AM = s$ sit vis
deorsum urgent, $= P$; erit $v = \int P dx$ hoc integrali ita
posito $x = 0$, si quidem corpus motum in A ex quiete
atque $dv = P dx$. Erit ergo

$$du = P dx + dv \text{ et } ddw = 0,$$

quia du invariata manet, cum m in n . Quocirca habet

$$2vd \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy dv}{ds},$$

cuius integralis est

$$l \frac{v^2}{a} = 2l \frac{dy}{ds} \text{ seu } v ds^2 = a dy^2,$$

hincque

$$dx^2 \int P dx = a dy^2 + dy^2 \int P dx.$$

1) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui auctoritate a praeiudicio
indesinenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729.

2) L. EULERI *Commentatio 42* (indicia EXSTREMUM): *De motu
medio quocunque resistente*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/51),
EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 25. Vido etiam *Commentationem 57*
Curvarum maximi minimae proprietate quodentium inventio nova et p
Petrop. 8 (1736), 1741, p. 172; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, sc.

amobrem pro linea brachystochrona quaesita habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx \sqrt{f P dx}}{\sqrt{a - \int P dx}},$$

qua indeterminatae x et y sunt a se invicem separatae. Curvae autem longitudo habetur ex hac aequatione

$$ds = \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{a - \int P dx}}.$$

Ex 1.

COROLLARIUM 1

368. In A igitur, ubi celeritas corporis evanescit seu fit $\int P dx = 0$, $y = 0$, seu tangens curvae in A erit vorticalis incidens in AP . At ubi $\int P dx = a$, ibi tangens curvae erit horizontalis.

COROLLARIUM 2

369. Quia $ddu = 0$ et $du = P dx$, erit

$$\frac{2v}{r} = \frac{P dy}{ds}$$

363). Est vero $\frac{P dy}{ds}$ vis normalis, qua curva in M secundum normam versus axem AP ductam premitur. Consequenter vis normalis est aequa centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachystochrona habet proprietatem, ut tota pressio, qua curva premitur, sit duplo major vis normalis sola. In sequentibus vero demonstrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachystochronis sive in vacuo sive in medio resistente habere.

COROLLARIUM 3

370. Propter arbitriam a dantur infinitae curvae brachystochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera a effici potest, ut curva per datum punctum C transcat, quae erit linea inter A et C , super quam compas est minimum.

371. Quia curva AMC (Fig. 47) alicui habet tangens sit ea BC et in C sumatur alius axis verticalis CQ .

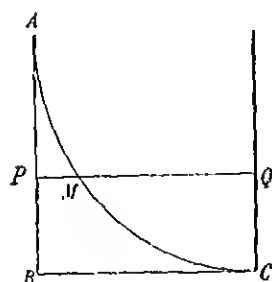


Fig. 47.

et $CM = S$; erit dX
 $dS = -ds$ atque

$$\int P dx = a$$

integrali $\int P dX$ ita accepto
 $X = 0$. Ad hunc ergo axem
habebitur ista aequatio

$$dY = \frac{dX \sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}} \quad \text{sen} \quad dS = -\frac{dX}{\sqrt{\int P dX}}$$

COROLLARIUM 5

372. Hae ergo omnes curvae ad utramque partem
habent similes et aequales. Simili modo ad utramque
aequaliter est disposita. Quamobrem huiusmodi curvae
habebunt inter se parallelas et ad distantiam BC positi
solicitant ita accipiantur, ut supra A sit negativa, et
sorsum tendere poterit et partem concavam deorsum

EXEMPLUM 1

373. Sit potentia sollicitans uniformis sen P
undo loco a posito gb pro brachystochrom in hac pote-
thesi habebitur ista aequatio

$$dy = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} \quad \text{sen} \quad ds = -\frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$$

At si aequatio ad axem CQ referatur, erit

$$dY = \frac{dX \sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}} \quad \text{et} \quad dS = \frac{dX \sqrt{b}}{\sqrt{X}}$$

cuius integralis est $S = 2\sqrt{bX}$. Ex qua aequatione patet

si horizontali a circulo diametri b descriptam et deorsum conversam, modum hoc a Cel. ION. BERNOLLI¹⁾ aliisque eximiiis geometris²⁾ iam est inventum. Si itaque dantur duo quaecunque puncta A et M , per qua corpus ex A citissime ad M descendit, invenitur, si describois cuspidem in A et basem horizontalem habens atque per punctum ens; id quod ex eo, quod omnes cycloides sunt curvae similes, ex scripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad git quodque est minimum, erit

$$= \int \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{g(bx - x^2)}}$$

et AM longitudo erit

$$= \int \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}} = 2b - 2\sqrt{b(b-x)}.$$

et sit

$$PM = y = \int \frac{x dx}{\sqrt{(bx - xx)}},$$

erit per AM

$$= \frac{2y + 2\sqrt{(bx - xx)}}{\sqrt{gb}}$$

in circulo diametri b , cuius sinus versus est $= x$, ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Idem notam 1 p. 163. P. St.

1. G. L[EBNIZ], *Communicatio suae pariter duarumque alienarum ut edendum sibi pri-*
2. Io. BERNOLLI, deinde a Dn. Marchione HOSPIRALIO communicatarum solutionum pro-
vae celerissimi descensus a Dn. Io. BERNOLLIO geometris publice propositi, una cum solu-
problematis alterius ab eodem postea propositi, *Acta erud.* 1697, p. 201; *Mathematische*
herausgegeben von O. I. GERHARDT, 2. Abteilung, Band 1, Halle 1858, p. 301.

B[ERNOLLI], *Solutio problematum fraternorum ... una cum propositione aliorum*, *Acta*
7, p. 211; *Opera*, Genovae 1744, p. 768.

3. L'HOSPITAL, *Solutio problematis de linea celerissimi descensus*, *Acta erud.* 1697, p. 217.
NEWTON, *Epistola missa ad praenobilem virum D. CAROLUM MONTAIGNE*, in qua solvantur
mata mathematicis a IOHANNE BERNOLLIO math. ed. proposita, *Philosophical trans-*
(London) 1697, p. 384; *Acta erud.* 1697, p. 223; *Opuscula*, Tom. I, Lausannae et
1744, p. 280.

4. NEWTON, *Analytical investigation of the curve of quickest descent*, *Philosophical trans-*
(London) 1698, p. 425.

5. MONTAIGNE, *The curve of the quickest descent*, *Philosophical transactions* (London)
1666. P. St.

374. Si potentia sollicitans P fuerit ut potestas quoniam
nempe $P = \frac{X^n}{f^n}$, erit

$$\int P dX = \frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Consequenter curva brachystochrona AMC exprimetur

$$dY = \frac{dX \sqrt{(n+1)af^n - X^{n+1}}}{X^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{seu} \quad dS = \frac{dX}{X^{\frac{n+1}{2}}}$$

ita ut sit

$$S = \frac{2X^{\frac{1-n}{2}}}{1-n} \sqrt{(n+1)af^n}.$$

Quare si fuerit vel $n=1$ vel $n>1$, curva CM erit i
recta BC . Cuspis autem curvae A seu locus, in quo
sumendo

$$CQ = BA = \sqrt{(n+1)af^n}.$$

Curvae prodibunt algebraicae, si fuerit

$$n = \frac{1-2m}{1+2m}$$

denotante m numerum integrum affirmativum quomodo
erit n numerus negativus unitate minor, ita tamen
affirmativus. Sit $m=1$, erit $n=-\frac{1}{3}$. Quare fiet

$$dY = \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)},$$

cuius integralis est

$$Y = \frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3f}} - \left(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis
curvae algebraicae inveniuntur, quae in certis hypo
chronae.

SCHOLIUM 1

5. Ex data problematis solutione sequitur simul solutio problematis quo quaeritur potentia sollicitans deorsum directa talis, ut data sit brachystochrona. Debet autem haec curva in puncto infimo O tangentem horizontalem et alicubi in A , ubi est motus initium, tangentem verticalem. Ut si fuerit aequatio pro curva data haec $dY = R dX$, erit

$$R^2 \int P dX = a - \int P dX \quad \text{atque} \quad \int P dX = \frac{a}{R^2 + 1}.$$

erit

$$P = \frac{-2aRdR}{(R^2 + 1)^2 dX} = \frac{2adXdYddY}{dS^3}.$$

radius osculi in M ponatur r , propter $r = \frac{dS^3}{dXdY}$ habebitur

$$P = \frac{2adY}{rdS}.$$

problema hac unica solvetur analogia: ut radius osculi curvae in M cum datam, ita sinus anguli, quem tangens curvae in M cum verticali ad potentiam sollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritatem corpus in M habet, est

$$a = \int P dX = \frac{aR^2}{R^2 + 1} = \frac{adY^2}{dS^2}.$$

sequitur celeritatem corporis esse illi ipsi sinui anguli, quem tangens cum verticali constituit, proportionalem. Ut si sit curva CMA circuli c descriptus, erit $r = c$ et

$$dY = \frac{cdX + XdX}{\sqrt{(2cX + XX)}} \quad \text{atque} \quad dS = \frac{cdX}{\sqrt{(2cX + XX)}}.$$

ergo fit

$$P = \frac{2a(c + X)}{c^2} = \frac{2a \cdot AP}{cc}.$$

ergo corpus deorsum trahens proportionalis esse debet abscissae AP , cui celeritas est proportionalis.

376. Inventa linea brachystochrona pro hypothesi deorsum tendentis ordo requireret, ut lineas brachystochronas centripetarum determinarem. At propositio ita est comparata, ut elementa curvae Mm et $m\mu$ (Fig. 46) et ordinatas orthogonales MP , mp referantur, quod ad petarum non commode quadrat. Videntur quidem elementa convergentia ad centrum virium considerari posse; sed hoc oritur, quod elementa MG et mH non essent. pa-
fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perspicuum determinando radio osculi, qui, si MG et mH fuerint.

$$= MG : d. \frac{mH}{Mm};$$

quae autem expressio non locum habet, si MG et mH convergant. Quare antequam ad brachystochronas in hypetiarum accedamus, ex propositione fundamentali gener-
prietatem cuiusque potentiarum sollicitantium hypo-
Ex quibus perspicitur Cel. HERMANNUM in *Phoronomia*¹⁾
stochronas pro viribus centripetis dederunt²⁾, esse decepti-
cipio cum veritate non consentaneo, ut mox indicabitur.

PROPOSITIO 42

THEOREMA

377. Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, ea lin-
quam corpus super ea motum premittit vi duplo maiore, quam
fuga vel sola vis normalis.

1) Iac. HERMANN, *Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum*.
Amstelodami 1716, p. 81. P. St.

2) Ioh. MACNE, *Inventio curvae, quam corpus descendens brevissi-*
gunde vi centripeta ad datum punctum tendente, quae crescat vel decre-
distanciae a centro; dato nempe initio curvae puncto et altitudine in prin-
transactions (London) 1718, p. 860. P. St.

DEMONSTRATIO

Quaecunque et quocumque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes resolvi possunt, quarum altera trahat secundum MG (Fig. 46, p. 100) et altera secundum MP . Sit illa secundum MG trahens $= P$ et, quae secundum MP trahit, $= Q$ et dicantur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ itemque altitudo in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis

$$= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$$

vis normalis

$$= \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

hinc ob rem erit

$$dv = Pdx - Qdy.$$

In hac expressione comparetur, quod supra (§ 364) est allatum, ubi posuimus

$$dx = Pdx + Qdy + Rds;$$

Quod negativum et $R = 0$. Sequitur ergo exinde fore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

est $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, quae curva in M premittitur, et $\frac{Pdy + Qdx}{ds}$ est vis sollicitans. Quare cum vis centrifuga sit aequalis vi normali, tota pressio, quae sustinetur, duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola sollicitans. Q. E. D.

SCHOLIUM 1

378. In sequente capite demonstrabimus hanc eandem propositionem etiam habere in medio quocumque resistente; id quod quidem etiam hic demonstrare potuissimus; sed quia resistantiae sequens capitulum inordinatum, eo potius hoc theorema transferre visum est.

COROLLARIUM 1

379. Ex hac igitur propositione facile erit in quacumque potentiarum hypothese brachystochronas determinare. Hocque ipsum in aliqua parte supra praestitimus, ubi curvas determinavimus, in quibus pressio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

COROLLARIUM 2

380. Cum sit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ ita accipiendis, ut evanescant factis x et $y = 0$, si quidem quiete incipere debet.

COROLLARIUM 3

381. Si ergo hic pro v inventus valor substituatur, pro curva brachystochrona haec

$$\frac{2\int Pdx - 2\int Qdy}{r} = \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Est vero $r = \frac{ds^2}{dx ddy}$ (§ 363) sumto dx pro constante, quia sitam axi AP cadere r ponitur; unde habetur haec aequatio

$$\frac{2dx ddy}{ds^2} (\int Pdx - \int Qdy) = Pdy + Qdx.$$

COROLLARIUM 4

382. Quia haec aequatio est differentialis secundi gradus duplicem integrationem requirit, altera integratione constanter adiaci, altera effici debet, ut facto $x = 0$ fiat quoque $y = 0$ prodeunt curvae brachystochronae pro eadem potentiarum systema thesi. Atque constante arbitraria effici poterit, ut curva pertranseat.

COROLLARIUM 5

383. Tempus, quo corpus ex A ad M pervenit, est

$$= \int \frac{ds}{V(\int Pdx - \int Qdy)} = \int V \frac{2dx ddy}{Pdy + Qdx},$$

quae quidem expressio prius ex aequatione curvae est inventa, vero hoc tempus esse debet inter omnia alia tempora motus omnes puncta A et M iungentes.

SCHOLION 2

384. Quomadmodum porro in quacunque potentiarum systema thesi eae curvae libere describuntur, in quibus vis conservatur.

contraria vi normali, ita eae curvae etiam centrifugae. Vis normalis quoque aequalis est vi centrifugae, sed in eandem plagam tendit. Atque quemadmodum illa proprietas communis est omnium curvarum descriptarum etiam in medio resistente, ita haec quoque proprietas a lineis brachystochronis in medio resistente extenditur.

PROPOSITIO 43

PROBLEMA

55. Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium C (Fig. 48) et lineam brachystochronam AM , super qua corpus ex A citissime ad M descendit, et.

SOLUTIO

A puncto A , in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C per rectam AC , item MC et in tangentem MT ex C perpendicularum CP ducuntur $AC = a$, $CM = y$, $CT = p$, vis per unitatem in $M = P$ et celeritas in $M = v$ et altitudo v . His positis oritur $v dy = P dy$ et $v = \int P dy$ hoc integrale accepto, ut evanescat posito y . Vis normalis autem erit $= \frac{Pp}{y}$; aequalis esse debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tam enim erit curva brachystochrona, ut propositione praecedente demonstravimus. Curva igitur debet esse convexa versus centrum C et radius osculi in partem a centro C cadit. Quare, cum expressio $\frac{y dy}{dp}$ exhibeat radium osculi, cum versus centrum cadit, erit vera expressio radii osculi in nostro casu $-\frac{y dy}{dp}$. Igitur centrifuga erit

$$= \frac{-2v dp}{y dy} = \frac{2dp}{y dy} \int P dy,$$

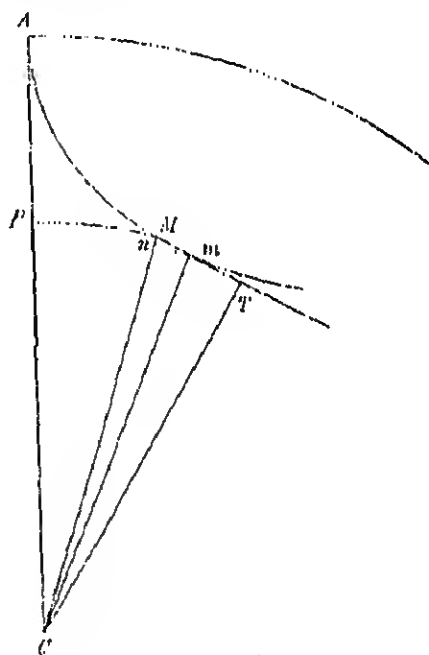


Fig. 48

cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur

$$\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy},$$

cuius integralis est

$$\frac{pp}{b} = - \int Pdy \quad \text{sen} \quad p = V^{-b} \int Pdy$$

quae est aequatio pro curva quaesita inter y et p . Ad
arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit

$$nm = \frac{yds}{a} \quad \text{et} \quad pp = \frac{y^4 ds^3}{a^2 dy^2 + y^2 ds^2}$$

Hinc fiet

$$ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2 - p^2)}}$$

atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituitur

$$ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2 + b\int Pdy)}},$$

quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a et
angulum ACM , ex qua fuit constructio curvae quaesiti

COROLLARIUM 1

386. Quia altitudo celeritati debita est

$$v = - \int Pdy = \frac{pp}{b},$$

celeritas corporis in quovis loco erit ut perpendiculi
demissum, simili modo, quo in motu libero celeritas
reciproce proportionalis.

COROLLARIUM 2

387. Sit radius osculi in $M = r$; erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex
Hinc ergo habebitur

$$r = \frac{2yp}{Pp} = \frac{2py}{bP}.$$

nam autem in initio curvae in A est $p = 0$ seu AC tangens curvae, vis osculi quoque in $A = 0$, nisi forte simul vis centripeta P inanescat.

COROLLARIUM 3

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco, ubi $dp = 0$; ibi aequatione pro curva fit $dy = 0$. Quare in eo loco corpus celeretur, ubi recta CM in curvam est normalis. Curva ergo ultra actam a centro C recedit.

SCHOLION 1

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione centripetae constituit; huius enim anguli TM/C sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas p inventa est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet in viriis infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt intercellulae, ut ex prop. 41 intelligitur, ubi celeritas erat ut $\frac{dy}{ds}$, i. e. ut sinus anguli, quem elementum curvae cum directione potentiae sollicitantis constituit. Hanc autem proprietatem Col. HERMANNUS in Comm. Acad. Petrop. A. 1744. de viriis brachystochronis tam in vacuo quam in medio resistente communis est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eas lineas, quas in medio resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vacuo viriis centripetis invenit. Hoc autem casu invenit hanc aequationem

$dy = \frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

EXEMPLUM 1

390. Sit vis centripeta ipsis distantis corporis a centro proportionis $P = \frac{y}{f}$. Quare erit

$$\int P dy = \frac{y^2 - a^2}{2f} \quad \text{atque} \quad v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}.$$

Haec est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesis. Sit y . Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui

1) Vide notam I p. 164. P. St.

qui aequalis poni debet vis normalis $\frac{Pp}{y}$; ex quo oritur

$$\frac{2dp}{p} = \frac{Pdy}{\int Pdy},$$

cuius integralis est

$$\frac{pP}{b} = - \int Pdy \quad \text{scilicet} \quad p = \sqrt{1 - b \int Pdy}$$

quae est aequatio pro curva quaesita inter y et p . Ad arcum MP hincque dicatur $\frac{y^2}{a}$, erit

$$um = \frac{yds}{a} \quad \text{et} \quad pP = a^2 dy^2 + y^2 ds^2$$

Hinc fiet

$$ds = \frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2 - p^2)}}$$

atque valore ipsius p ex superiore aequatione substituto

$$ds = \frac{-ady\sqrt{-b\int Pdy}}{y\sqrt{(y^2 + b\int Pdy)}},$$

quae est aequatio inter y et arcum circuli s radio a et angulum ACM , ex qua fuit constructio curvae quaesitae.

COROLLARIUM 1

386. Quia altitudo celeritati debita est

$$v = - \int Pdy = \frac{vP}{b},$$

celeritas corporis in quovis loco erit ut perpendicularis demissum, simili modo, quo in motu libero celeritas reciproce proportionalis.

COROLLARIUM 2

387. Sit radius osculi in $M = r$; erit $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ ex hinc ergo habebitur

$$r = \frac{2yv}{Pp} = \frac{2py}{bP}.$$

90-131} DE MOTU CORP. ALI SCILICET DATA LINEA IN VACUO

quia autem in initio curvae in A est $p=0$ seu AC tangens curvae, et radius osculi quoque in $A=0$, nisi forte simul vis centripeta P in A evanescat.

COROLLARIUM 3

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco, ubi $dp=0$; ibi autem ex aequatione pro curva fit $dy=0$. Quare in eo loco corpus celeriter movetur, ubi recta CM in curvam est normalis. Curva ergo ultra locum punctum a centro C recedit.

SCHOLIUM 1

389. Celeritas ergo corporis in singulis brachystochronae punctis est proportionalis sinui anguli, quem tangens curvae cum directione vis centripetae constituit; huius enim anguli PMC sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipsi p inventa est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, ubi centrum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inter se parallelae, ut ex prop. 41 intelligitur, ubi celeritas erat ut $\frac{dy}{ds}$, i. e. ut sinus anguli, quem elementum curvae cum directione potentiae sollicitantis constituit. Hanc autem proprietatem Col. HERMANNUS in Comm. Acad. Petrop. A. 1722 de omnibus brachystochronis tam in vacuo quam in medio resistente communiter esse arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eas lineas, quas in medio resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vacuo pro viribus centripotis invenit. Hoc autem casu invenit hanc aequationem $\int \frac{Pdy}{b} = \frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

EXEMPLUM 1

390. Sit vis centripeta ipsis distantis corporis a centro proportionalis sicut $P = \frac{y}{f}$. Quare erit

$$\int Pdy = \frac{y^2 - a^2}{2f} \quad \text{atque} \quad v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}.$$

Quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothese in a et y . Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui

1) Vide notam 1 p. 164. P. SL

mensura anguli ACM , et y est haec

$$ds = \frac{-a dy \sqrt{b(a^2 - y^2)}}{y \sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2b)}}.$$

Huius curvae punctum infimum seu centro proximum habebit
 $dy = 0$ vel $p = y$; tunc autem erit

$$y = \frac{a \sqrt{b}}{\sqrt{(b + 2f)}};$$

haec ergo est minima curvae a centro C distantia. Radius
 curvae in quovis puncto est

$$= \frac{2py}{bP} = \int \frac{2f(a^2 - y^2)}{b}.$$

In puncto ergo centro proximo radius osculi est maximus, quip

$$= \frac{2af}{\sqrt{b(b + 2f)}}.$$

Ponatur tangens anguli $ACM = t$ posito sinu toto = 1; erit.

$$\frac{ds}{a} = \frac{dt}{1 + tt};$$

ponatur porro

$$\frac{\sqrt{b(a^2 - y^2)}}{\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2b)}} = q;$$

habebitur ista aequatio

$$\frac{dt}{1 + tt} = \frac{dq}{1 + qq} = \frac{dq}{1 + \frac{b + 2f}{b} qq}.$$

Ex quo intelligitur curvam toties esse algebraicam, quoties est
 quadratus. Longitudo curvae AM est porro generaliter

$$= \int \frac{-y dy \sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2 + b f P d y)}};$$

hoc ergo casu erit

$$AM = \int \frac{-y dy \sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2b)}} = \frac{2af - \sqrt{2f(2fy^2 + by^2 - a^2b)}}{2f + b}.$$

super concava parte peripheriae AE centro C radio AC descriptae. igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides super pheria AE natas esse brachystochronas.

EXEMPLUM 2

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiae ut sit $P = \frac{f^2}{y^2}$; unde erit

$$\int P dy = -\frac{f^2}{y} + \frac{f^2}{a} = \frac{f^2(y-a)}{ay} \quad \text{atque} \quad v = \frac{f^2(a-y)}{ay} = \frac{p^2}{b},$$

quo est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypo. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit ista.

$$ds = \frac{-ady\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{ay^3 + bf^2y - abf^2}}.$$

Huius ergo curvae punctum infimum posito $dy=0$ determinabitur opo aequationis cubicae $ay^3 + bf^2y - abf^2$. Ceterum ista aequatio inter s et y sufficit ad curvam quaesitam construendam.

SCHOLIUM 2

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propositionibus sunt, intelligitur, quomodo in quacunque potentiarum sollicitantium Hypothesi ea linea sit inveniendae, super qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citissime perveniat. Nunc ergo etiam determinari oportet lineam, super qua corpus a dato puncto citissime non ad datum punctum sed ad datam lineam perveniat, quae sane curva una erit ex infinitis brachystochronis; at quoniam ea sit, in sequente propositione declarabimus.

THEOREMA

393. Corpus a dato puncto A (Fig. 49) ad quatuorlibet punctum M citissime pervenit super linea brachystochrona AM , quae ad punctum M ad angulos rectos occurrit, hocque in quacunque potentiarum.

DEMONSTRATIO

Sit AM ea linea, super qua corpus ex A citissime perveniat; perspicuum est primo hanc lineam fore brachystochronam; si enim daretur linea, super qua corpus citius perveniret, ea potius quaereretur, quam haec linea AM ad punctum M ad angulos rectos occurrit; nisi non occurreret, ducta minima linea Amn , corpus citius per Amn ad punctum M perveniret, quam per AM . Quare corpus ad punctum M invenire possit, necesse est, ut linea AM normaliter insistat punctum M super ea infinitarum brachystochronarum curvarum BM ductarum citissime pervenit, quae curvae BM ad angulos rectos occurrit.

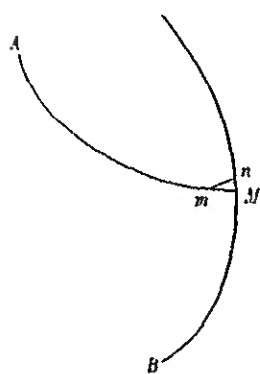


Fig. 49.

pervenit, quae curvae BM ad angulos rectos occurrit.

COROLLARIUM 1

394. Si ergo infinitae curvae quaerantur, super quibus corpus ab A ad lineam BM perveniat, oportet, ut unaquodque sit brachystochrona; utque tempus per brachystochronam AM ; alias enim non est possibile.

COROLLARIUM 2

395. Si accadat, ut plures curvae brachystochronae ab A ad lineam BM , plura quoque prodibunt tempora minima; ut enim methodus tam minima quam maxima declaratur.

COROLLARIUM 3

396. Quia tempus per curvam brachystochronam AM est minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, si duae brachystochronae proximae concipiantur normaliter insistentes curvae BM , tempora per eas inter se aequalia.

COROLLARIUM 4

397. Hinc porro perspicitur, si curva BM fuerit eiusmodi, ut omnes brachystochronas ex puncto A ductas secet ad angulos rectos, tempora per eas omnes brachystochronas ad curvam BM usque ductas fore inter se aequalia.

COROLLARIUM 5

398. Quamobrem curva, quae ab omnibus curvis brachystochronis ex puncto A ductis arcus isochronos seu eodem tempore percursos abscindit, quoque omnes brachystochronas ad angulos rectos secabit seu erit illarum trajectoria orthogonalis.

COROLLARIUM 6

399. Atque vicissim quoque perspicitur, si curva, quae ab infinitis curvis brachystochronis arcus isochronos abscindit, fuerit earum trajectoria orthogonalis, eas infinitas curvas omnes esse brachystochronas.

SCHOLIUM

400. Facile intelligitur hanc propositionem locum quoque habere in medio resistente; simili enim modo apparet tempus per elementum mn in medio resistente in curvam BM minus esse quam tempus per elementum mM , quod non est perpendiculare; in hoc autem totius demonstrationis vis est scire quare si infinitis curvis ex puncto A eductis lex potentiarum sollicitantium in medio resistente poterit inveniri, in qua eae curvae omnes sint brachystochronae, tum illarum harum curvarum trajectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerentium tantum curvam ab iis curvis arcus isochronos abscindentem. Atque hanc ipsam trajectoriarum orthogonalium inveniendi methodum iam adhibuit JOH. BERNOULLI in Act. Lips. A. 1697.¹⁾

1) Vide notam 1 p. 163. P. St.

PROPOSITIO 45

PROBLEMA

401. *Inter omnes curvas puncta A et C (Fig. 50) iungentes longas eam determinare AMC, super qua corpus celerrime ex A ad C in hypothesis potentiae sollicitantis uniformis g et deorsum directae.*

SOLUTIO

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur $AP = x$, $AM = s$ eritque tempus, quo arcus AM absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$$

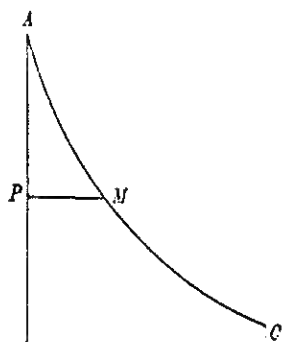


Fig. 50.

Iam per methodum isoperimetricorum peculiarem dedi dissertationem cum formulis, ex quibus quaevis problemata fieri possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1. quantitates considerandae sunt: arcus AM et tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum

terius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim inter omnes curvas aequae longas quaeratur ea, quae brevissimus descensus, sive inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem ea, quae est brevissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$ hanc quae diff. $\frac{dy}{ds}$ et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat diff. $\frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy \sqrt{a}}{ds \sqrt{x}} - m$$

seu

$$dy(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = m ds \sqrt{x}.$$

1) L. EULERI Commentatio 27 (indicis ENNSTROEMIANI): Problematis isoperimetrisimo sensu accepti solutio generalis, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1782/3), 17. LEONHARDI EULERI Opera omnia, series 1, vol. 25. P. St.

vero quadratis erit

$$dy^2(\sqrt{a - \sqrt{x}})^2 = m^2 x dx^2 + m^2 x dy^2,$$

$$dy = \frac{m dx \sqrt{x}}{\sqrt{a - 2\sqrt{ax} + (1 - m^2)x}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx(\sqrt{a - \sqrt{x}})}{\sqrt{a - 2\sqrt{ax} + (1 - m^2)x}}.$$

curva quaesita determinabitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

In aequatione inventa duae insunt quantitates a et m arbitrariae. Effici potest, ut curva per datum punctum C transeat et ut simul sitae longitudinis. Atque tum haec curva coloritur absolvetur inter omnes eas eiusdem longitudinis per A et C transcurrentes.

COROLLARIUM 2

Si ponantur a et m infinito magna, prodibit cyclois, quae non inter omnes curvas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino absolvetur.

COROLLARIUM 3

Si ponatur $m = 0$, prodibit $dy = 0$ seu recta verticalis. At si fiat $a = 0$, erit recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linearis, quae eodem tempore absolvuntur, minima seu brevissima.

COROLLARIUM 4

Si ponatur $m = 1$, prodibit curva algebraica; erit enim

$$dy = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a - 2\sqrt{ax}}},$$

integralis est

$$y = \frac{-(4a + 4\sqrt{ax} + 6x)\sqrt{a - 2\sqrt{ax}}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}.$$

Haec curva etiam est rectificabilis; namque erit

$$s = \frac{2a}{5} \cdot \frac{(2a + 2\sqrt{ax} - 2x)}{5\sqrt{a}} \sqrt{(a - 2)\sqrt{ax}}.$$

Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} \cdot \frac{(4\sqrt{a} + 2\sqrt{x})}{3\sqrt{a}} (a - 2)\sqrt{ax}.$$

Aequatio vero pro curva reducta fit ordinis quinti.

COROLLARIUM 5

406. Si in hac curva sumatur $x = \frac{a}{5}$, ibi tangens erit horizontalis in eo curvae puncto erit diameter curvae. Ut fit $y = \frac{4a}{15}$ et longitudo curvae ad hoc punctum erit $\frac{2a}{5}$, quo hic arcus absolvitur, est $\frac{4\sqrt{a}}{3}$. Eodem ergo tempore descendet per altitudinem $\frac{4}{5}a$.

SCHOLIUM

407. Missis nunc hisce de celeberrimo descensu programmatis considerandas, super quibus plures descensus inter se comparationem relationem. Huc maxime pertinet quaestio de curvis tantis quibus vel omnes descensus ad punctum infimum curvae neque tempore vel integre oscillationes. Ad haec deinde aliae ac quaestiones cum difficiles tum vim methodi, quam utemur, illae

PROPOSITIO 46

PROBLEMA

408. *Invenire legem generalem curvarum tautochronarum, super descensus ad punctum A , initio descensus ubicunque in curva AM accepto, absolvantur eodem tempore.*

SOLUTIO

Sunta recta AP pro axo dicatur curvae portio $AM = s$ sitaque altitudo in A debita $= b$ et altitudo celeritati in M debita $= v$; erit tempus arcus AM absolviatur,

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{v}},$$

Modo integrale ita est capiendum, ut evanescat positum $s = 0$. Tum, si in eo integrali ponatur $b = 0$, habebitur tempus descensus a loco, in quo celeritas erat nulla, usque ad punctum A et totum descensus tempus; id quod eadem altitudo expressum esse debet, quaecumque fuerit quantitas b . Haec igitur quantitas b neque in expressione temporis inesse debet neque in expressione curvae AM , quia haec eadem curva idem descensus tempus producat, atquecumque varietur b .

Sit iam v quantitas composita ex littera z , ad curvam portinente celeritas, curvae AM cum abscissa AP et applicata PM tantum pendente neque b involuto, utque ex littera h , quae ex b et quantitatibus constantibus composita. Sit autem v talis ipsarum h et z functio, ut evanescat positum $h = b$ atque ut fiat $= b$, si sit $z = ah$ existente a numero quocumque. Sit pariter $ds = p dz$ pro aequatione curvae quaesitae; debet p talis quantitas, in qua non continentur b vel h , quia haec litterae in aequatione curvae ingredi nequeunt. Habebimus ergo pro expressione temporis per z

$$\int \frac{p dz}{\sqrt{v}}$$

Modo integrale ita accepto, ut evanescat positum $v = b$ seu $z = ah$. Deinde integrale, si in eo ponatur $z = h$, dabit tempus totius descensus, in quo evanuisse non poterit. Hoc vera evenit, si $\int \frac{p dz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipsarum

h et z nullius dimensionis seu si $\frac{p z}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis.

Si ergo $\frac{p z}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimensionis, debet esse

$$p = C z^{\frac{m-2}{2}}$$

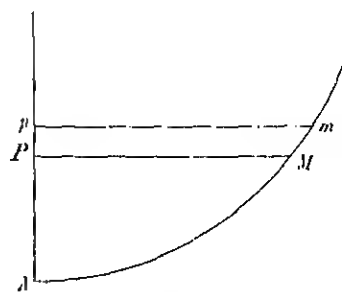


Fig. 51.

denotante C quantitatem constantem a b non pendente
 v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curva qua

$$ds = Cz^{\frac{n-2}{2}} dz \quad \text{seu} \quad s = \frac{2Cz^{\frac{n}{2}}}{n} + \text{const.}$$

si opus est, quo s evanescat, si in z evanescat vel x ve

COROLLARIUM 1

409. Quo igitur haec methodus possit adhiberi, c
 tatibus finitis sit expressum atque ut ea expressio t
 functionem homogeneam ex h et z constantem.

COROLLARIUM 2

410. Hanc ob rem necesse est, ut fiat $v = b$, si po
 quantitate constante adiecta etiam non reperiatur h
 viderimus fieri $v = b$ facto $z = ah$, neque opus est, ut

COROLLARIUM 3

411. Intelligitur etiam curvam in A habere debore
 in directionem vis sollicitantis; nisi enim hoc fuerit
 descensus infinite parvam foret quoque infinito parvam.

SCHOLION

412. Valet haec solutio non solum, si, uti figura iue
 per coordinatas orthogonales; nihil enim interest, qui
 naturam curvae exponere velimus, dummodo in z non
 autem z continere lineas et quantitates quascunque a c
 igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum sol
 lineae tautochronae poterunt inveniri, quia semper col
 finitas exprimi potest. At si, ut in mediis resistantibus
 non potest exhiberi finitis quantitibus, haec methodus
 sed alia desideratur, quae succedit, etiam si celeritas l
 rentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47

PROBLEMA

413. Si corpus deorsum sollicitetur ei quocunque, invenire lineam tautochronam per qua omnes descensus fiant eodem tempore.

SOLUTIO

Posito $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$ (Fig. 51, p. 183) sit celeritas debita altitudini b et in M debita altitudini c . Sit porro vis sollicitantis $M = P$; erit $v = b = \int P dx$ integrali $\int P dx$ ita accepto, ut evanescat $x = 0$. Iam si ponatur $b = h$ et $\int P dx = z$, erit v functio unius dimensionis ipsarum h et z et evanescit facto $z = h$ fitque $v = b$ facto $z = h$ igitur $m = 1$ ideoque habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$$ds = \frac{v ds}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a \int P dx}.$$

Desideratur aequatio inter x et y , erit ob $ds = \frac{a P dx}{\sqrt{a \int P dx}}$

$$dy = \frac{dx \sqrt{a P^2 - \int P dx}}{\sqrt{\int P dx}}.$$

E. L.

COROLLARIUM 1

414. Quia evanescit $\int P dx$ facto $x = 0$, tangens curvae in A erit horizontalis, nisi in A evanescat P . Atque curva alicubi habebit tangentem verticalem ibique plerumque cuspidem; hoc evenit, ubi erit $\int P dx = aP$ enim fit $dy = 0$.

COROLLARIUM 2

415. Huius curvae in puncto infimo A radius osculi est aequalis summi radii $= \frac{y dy}{dx} = \frac{s ds}{dx}$, quia in A s et y sunt aequalia. Quare in A erit radius osculi $= 2aP$, ubi P denotat potentiam sollicitantem in puncto A .

416. Ex radio osculi in A et potentia sollicitante ascensus vel descensus per infinitum parvum arcum

$$\frac{\pi V'1aP}{2V'P} = \pi V'a.$$

(§ 172). Unique tempori tempus cuiusque descensus thesi ergo gravitatis $\propto 1$ pendulum longitudinis $2a$ et eodem tempore absolvet.

EXEMPLUM 1

417. Sit potentia sollicitans ubique constans, nempe

$$\int P dx = gx = \text{aliquod } s = 2V'ga$$

itemque

$$dy = \frac{dx V'(ga - x)}{V'x},$$

unde intelligitur curvam esse cycloidem deorsum et lineam brachystochrona in eadem potentia hypothese autem omnes descensus fiunt eodem tempore super demonstravimus (§ 187).

EXEMPLUM 2

418. Sit potentia sollicitans ut potestas quaecunque

$$P = \frac{x^n}{f^n} \text{ id. } \int P dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

si quidem fuerit $n+1$ numerus affirmativus; sin enim negativus, fiet $\int P dx = \infty$. Erit igitur

$$s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}} V' \frac{a}{n+1} \text{ atque } dy = \frac{dx V'(a - x)}{f^{\frac{n}{2}}}$$

Ex qua aequatione intelligitur curvam fore rectam horizontem, si fuerit $n=1$. At si $n > 1$, curva in quo usque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n+1)$

SCHOLIUM 1

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum vacui. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curva MM ad alteram partem usque producta esse, quae isochronae et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde, si arbitriam a infinitas sint curvae tautochronae AM , duae quaeque puncto A coniunctae, ut ibi habeant tangentem communem horizontalem, inducent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas, sicut pendulum ita accommodetur, ut oscillando huiusmodi curvas absolveret.

SCHOLIUM 2

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curvas, quas invenimus, non esse, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substituitur, ut in integrali, si ponatur $v=0$, prorsus ex formula exeant b semioscillationes, quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inventae, non satis licet.

SCHOLIUM 3

421. Quia est $s=2\sqrt{a}\int Pdx$, erit $P=\frac{sdz}{2adx}$. Ex quo apparet, curvae esse debent potentia sollicitans, ut data curva sit tautochrona. Si potentia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{sdz}{dx}$ ex data curva. Quare, nisi curva sit rectificabilis, valor potentiae sollicitantis non potest algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48

PROBLEMA

422. Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium C (Fig. 52, p. 188) visque, invenire lineam tautochronam BMA , super qua corpus omnes descensus a puncto A usque eodem tempore absolvat.

SOLUTIO

Dicatur $CA=c$, $CM=y$ et vis contripeta in M corpus sollicitans sit $\frac{1}{y^2}$, porro celeritas in A debita altitudini b et ea in M altitudini v . Sum

$\int Pdy$ ita, ut evanescat posito $y=c$, quo facto erit $v =$
ergo b pro h et $\int Pdy$ pro z erit functio ipsarum h o

unius dimensionis

Si nunc arcus AD

$$s = 2\sqrt{az}$$

atque hinc

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ds_0$$

Si nunc in M
 canque ex centro
 pondiculum CT , quod

$$\frac{y dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Quare habobitur

$$y^3 \int P dy = (y^2 - p^2) a P^2 \quad \text{sen} \quad p^2 = y^2 - \frac{y^3 \int}{a}$$

aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

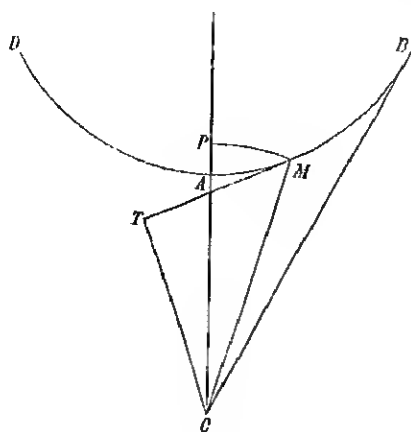


Fig. 62.

COROLLARIUM 1

423. In puncto A , ubi $\int P dy$ evanescit, erit $p = y$, normalis in curvam in eoque propterea celeritas corporis A est punctum curvae centro C proximum.

COROLLARIUM 2

424. Si ponatur $p = 0$, habebitur punctum curvae B curvam tangit. In eoque puncto, quod erit supremum habebit. Invenitur vero punctum B ex hac aequatione a y non poterit esse maior quam valor ex hac aequatione

COROLLARIUM 3

425. Apparet etiam ex aequatione inventa $s = 2\sqrt{a} \int$
radicale signum ambiguum involvit, curvam duos habere
inter se similes et aequales et hanc ob rem oscillationes,
BAD fiunt, osse inter se aequales.

COROLLARIUM 4

26. Radius osculi in puncto A est $= \frac{2acP}{c-2a}$. Et quia est $AC =$
 tempus, quo unus descensus super curvae AB portione infinite parva
 fitur, $= \pi \sqrt{a}$ (§ 207); huic igitur tempori omnes descensus erunt aequales
 ob rem oscillationes, quae fiunt super curva BAD , isochronae erunt
 oscillationibus penduli in hypothesis gravitatis $= 1$, cuius longitudo
 est $2a$.

EXEMPLUM 1

27. Sit vis centripeta directe proportionalis distantiae a centro, ut sit
 $\frac{1}{r^2}$; erit

$$\int P dy = \frac{y^2 - c^2}{2f}.$$

ergo erit

$$AM = s = \sqrt{\frac{2a(y^2 - c^2)}{f}} \quad \text{atque} \quad r^2 = yy = \frac{f(yy - cc)}{2a}.$$

curvae radius osculi in puncto M , qui est $\frac{ydy}{dp}$, invenitur

$$= \frac{2a}{2a-f} \sqrt{\frac{(2a-f)y^2 + f^2}{2a}}.$$

ergo sequitur, si fuerit $2a < f$, curvam versus centrum C fore convexam
 exhibet figura. At si fuerit $2a = f$, curva evadet linea recta in A usque
 ad rectam AC . Punctum autem B , ubi CB tangit curvam, invenitur
 ex aequatione

$$(f - 2a)yy = cc f,$$

nam sit

$$BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{f-2a}}.$$

ergo accidit, ut sit $f > 2a$ seu curva convexa versus C , habebit curvam
 eandem in B . Atque in his casibus curva erit hypocyclois, quae generatur
 rotatione circuli, cuius diameter est

$$= \frac{c\sqrt{f} - c\sqrt{f-2a}}{\sqrt{f-2a}},$$

super concava parte circuli centro C radio

$$= \frac{c\sqrt{f}}{f(f+2a)}$$

descripti. Hoc ergo casu curvae tantochronae conventionis supra inventis (§ 390).

At si $2a > f$, quo casu curva est concava versus C , et curva AM non amplius est hypocyclois. Tum autem

$$p^2 = \frac{(2a-f)yy + ccf}{2a}.$$

unde p ubique praeter in A erit maior quam AC . Sit $c=0$, quare hoc casu curvae tantochronae erunt omnes spirales centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logeodem tempore ad centrum C pertinget, ubiunque descendit igitur vis centripetae hypothesei tantochronae erunt: priores, deinde omnes lineae rectae utcumque ductae, logarithmicae et quarto infinitae curvae aliae hac ac $p^2 = \frac{(2a-f)y^2 + ccf}{2a}$, si quidem fuerit $2a > f$ et c non $= 0$. centripetae hypothesei pro tantochronis tantum deservunt TOXUS in *Princ.* et HERMANNUS in *Phoronomia* et Comment. A. 1727², quamvis hic aequationem aequae generalem ac

EXEMPLUM 2

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quod a centro, ut sit $P = \frac{ff}{yy}$; erit

$$\int P dy = -\frac{ff}{y} + \frac{ff}{c} = \frac{ff(y-c)}{cy}.$$

Curva igitur AM erit

$$= 2f \sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}} \quad \text{atque} \quad pp = \frac{acff/y + cy^3}{acff}$$

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, loc. positio LI, theorema XVIII. P. St.

2) IAC. HERMANN, *Phoronomia*, Amstelodami 1716, p. 89; *Theoriae nascentur a potentiis quibusvis in corpora indiesimenter agentibus*, Comment. (1727), 1729, p. 139, vide praecipue p. 150. P. St.

ut invenitur radius osculi

$$\frac{ydy}{dp} = \frac{2fy\sqrt{ac}(acff+cy^3-y^4)}{2acff+5cy^3-6y^4}.$$

ergo p evanescit, ibi etiam radius osculi fit $= 0$. Ipsius BC valor augetur ex hac aequatione $y^4 = cy^3 + acff$. Si igitur ponatur $BC = k$, $k^4 = ck^3 + acff$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum foret hanc curvam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, quod evenit, si curva in A est concava versus C , nempe si fuerit $2acff >$

EXEMPLUM 3

429. Sit vis centripeta ubique constans seu $P = 1$; erit $\int Pdy = y$ et si centro C radio CM ducatur arcus MP , erit $\int Pdy = AP$ atque

$$\text{arcus } AM = 2\sqrt{a}(y-c) = 2\sqrt{a} \cdot AP.$$

erit porro

$$p^2 = y^2 - \frac{y^3(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^3 - y^3}{a},$$

ut invenitur $BC = a+c$ et curva $AB = 2a = 2(BC - AC)$. Radius vero in puncto M erit

$$= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}.$$

In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curva igitur in A est concava versus C , si $2a > c$, at convexa, si $c > 2a$, atque radius osculi infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curva in A est concava versus C , curva habebit punctum flexus contrarii, ubi est

$$CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}BC.$$

Est $c = 0$ ita ut punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huiusmodi atque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curvae radius osculi in ipso centro C infinite parvus, atque est

$$p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}};$$

qua autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PROBLEMA

430. Si corpus sollicitetur a potentiis quibuscunque, (Fig. 53), super qua omnes descensus ad punctum A temporibus.

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eae omnes duas, quarum altera corpus perpetuo deorsum trahat, altera vero horizontaliter secundum

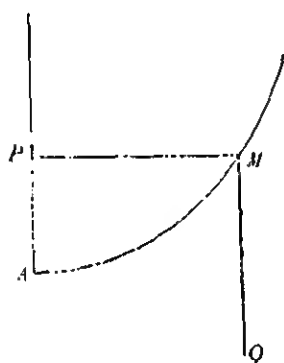


Fig. 53.

secundum MQ trahit, $= P$; AP trahit, $= Q$; dicantur $AM = s$ sitque celeritas in M longitudini b et celeritas in A depositis erit

$$v = b \dots \int P dx$$

Quare si ponatur $h = b$ erit v functio unius dimensionis et propterea $m = 1$ (§ 408).

pro curva quoesita ista aequatio

$$s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a} \left(\int P dx + \int Q dy \right)$$

seu

$$ds = \frac{a P dx + a Q dy}{\sqrt{a} \left(\int P dx + \int Q dy \right)}$$

At quia est $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a P Q \pm \sqrt{a \left(\int P dx + \int Q dy \right) (a P^2 - \int P dx - \int Q dy - a Q^2)}}{\int P dx + \int Q dy - a Q^2}$$

In ipso ergo principio A , ubi est $\int P dx + \int Q dy = 0$ seu $dy:dx = -P:Q$. Atque ut ex praecedentibus insque descensus aequatur tempori, quo in hypothese nihilum longitudinis $2a$ descensum absoluit. Q. E. I.

SCHOLIUM

431. Si habeatur curva, super qua omnes descensus fiant eodem tempore, facile erit dare curvas, super quibus oscillationes omnes eodem tempore terminantur. Nam quia in vacuo ascensus similes sunt descensibus, omnis curva, quae est tautochrone pro descensibus, talis quoque erit pro ascensibus. Quare duae curvae tautochronae coniunctae in puncto A dabitur curvam, super qua omnes oscillationes sunt isochronae. Attamen hac ratione tantum problema, quo curvae omnes oscillationes isochronas producantur, quae quiritur, non perfecte solvitur; dari enim possunt curvae infinitae huiusmodi, quae quaestioni satisficientes, quarum tamen partes non sint aptae ad descensus isochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi potest: dabitur curva quaecumque invenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oscillationes aequidistantes.¹⁾ Nunc vero antequam ad haec progrediamur, adducamus problema proferemus, in quo quaeritur curva datae curvae adiungenda, super qua omnes descensus super hac curva composita absolvantur temporibus aequalibus. Quod problema ut maximo difficillimum mihi quondam erat propositum a CL. DAN. BERNOULLI.²⁾ Attamen hac methodo, qua in investigatione tautochronarum utor, etiam istud problema resolvi potest.

PROPOSITIO 50

PROBLEMA

432. *In hypothesis gravitatis uniformis deorsum tendentis si detur curva NB (Fig. 54, p. 194), invenire curvam BMF' ei adiungendam, ut omnes descensus super hac curva composita ad A usque absolvantur aequalibus temporibus, in puncto A utique curvae BMF' puncto descensus incipiat.*

1) L. EULERI Commentatio 12 (indicis ENESTROEMIANI): *De innumerabilibus tautochronis in vacuo*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series II, vol. 4. P. St.

2) Vido L. EULERI Commentationem 24 (indicis ENESTROEMIANI): *Solutio singularis problemae de tautochronismo*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 28; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series II, vol. 4. P. St.

descensus. Sit nunc curvae quaesitae BME natura sequente serie

$$ds = - A dx \sqrt{x} - B x dx \sqrt{x} - C x^2 dx \sqrt{x} - D x^3 dx \sqrt{x} - \text{etc.} \\ - F dx - G x dx - H x^2 dx - I x^3 dx - \text{etc.}$$

Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi:1$, quae revera est $l-1$: ita ut sit

$$\pi = - \frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \cdot l - 1.$$

Est vere post integrationem posito $x=b$

$$\int \frac{A dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2} \pi A b, \quad \int \frac{B x dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \pi B b^2, \quad \int \frac{C x^2 dx \sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \pi$$

atque

$$\int \frac{F dx}{\sqrt{(b-x)}} = 2 F \sqrt{b}, \quad \int \frac{G x dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3} 2 G b \sqrt{b}, \quad \int \frac{H x^2 dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} 2 H b^2$$

Quo igitur horum terminorum cum illis terminis conjunctim tenentur BNA exprimentibus aggregatum aequetur ipsi k , termini homogenei ventres sese tollere debent. Fiet igitur

$$\frac{1}{2} \pi A = \alpha \quad \text{seu} \quad A = \frac{2}{1} \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

similique modo

$$B = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\beta}{\pi}, \quad C = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \quad \text{etc.}$$

atque

$$F = \frac{\xi}{2}, \quad G = \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta}{2}, \quad H = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\theta}{2}, \quad I = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\iota}{2} \quad \text{etc.}$$

Quamobrem, cum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., ξ, η, θ, ι etc. sint quantitates propter curvam ANB datam, habebitur pro curva quaesita BME ista

$$ds = \frac{-dx}{\pi} \left(\frac{2}{1} \alpha \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \beta x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \gamma x^2 \sqrt{x} + \text{etc.} \right) \\ - \frac{dx}{2} \left(\xi + \frac{3}{2} \eta x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \theta x^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \iota x^3 + \text{etc.} \right),$$

cuius integralis est

$$s = \frac{-2}{\pi} \left(\frac{2}{3} \alpha x \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \beta x^2 \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \gamma x^3 \sqrt{x} \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\zeta x + \frac{3}{4} \eta x^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \theta x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \iota x^4 \right)$$

Cuius seriei hanc de constructionem: sumatur

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}},$$

ita ut evanescat posito $u=0$; tum fiat $u=a$ et prodit ipsius b . Ponatur $x(1-z)$ loco b , et quod prodit, si $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$, dum x ut constans consideretur, ita ut evanescat ponatur $z=1$ et prodibit functio ipsius x , quae erit

$$= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}.$$

Hocque modo prodibit aequatio pro curva quaesita. Q

SCHOLION 1

433. Constructio haec prorsus singularis, sed facili ea methodo, qua usus sum in aequatione a C. RICCA construenda¹⁾, atque hac potissimum gaudet praerogativa fuerit curva data, quaesita eius ope semper possit constructi ipsa, quo pro curva invenitur, minime saepe tractari statim aequationem finitam eam, quae alias ex summatione

COROLLARIUM 1

434. Si in aequatione pro curva BMI' inventa

$$ds = \frac{-\xi dx}{2},$$

1) L. EULERI Commentatio 31 (indicis ENESTROEMIANI): *Consideratio* $ax^2 dx = dy + y^2 dx$, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), *EULERI Opera omnia*, series I, vol. 22. P. St.

inatio curvae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appropinquo haec duae curvae invicem cohaereant, oportet quoque positionis curvae ANB in B determinare.

COROLLARIUM 2

Sit $DQ = p$ et $BN = q$ (Fig. 54, p. 194); erit $dt = -dq$ et p . Undo tempus per $BN A$ erit $= \int \frac{dq}{V(b+p)}$, posito in hoc integrali sit in ipso puncto B $dq = Ldp$; erit generatim $dq = Ldp + Pdp$ P tali functione ipsius p , quae evanescat posito $p = 0$. Videamus quomodo p qualem terminum haec aequatio

$$\int \frac{dq}{V(b+p)} = \int \frac{Ldp}{V(b+p)}$$

Prodit autem posito $p = a$

$$2LV(b+a) - 2LVb,$$

in serie initio assumpta prodit terminus $-2LVb$ (§ 436), qui convenit; erit ergo

$$L = -\frac{\xi}{2} \quad \text{et} \quad dq = -\frac{\xi dp}{2}.$$

Intelligitur curvam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B non habere tangentem.

SCHOLIUM 2

Dixi $2LV(b+a) - 2LVb$ in serie dare hunc terminum $-2LVb$; $(b+a)$ dat terminos hos $Va + \frac{b}{2Va} + \text{etc.}$ cum aliis comparandos. Hic terminus Ldp dat terminum huius formae ξVb . Quare ex eo de inclinatione curvae in B concludere licet.

SCHOLIUM 3

Constructio curvae quaesitae, quam dedi, etiam hoc modo immutari tribatur, postquam in integrali

$$\int \frac{dt}{V(a-u)} = \int \frac{dt}{V(a+b-u)}$$

positum est $u = a$, loco b hoc xz et vocato eo, quod

$$\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)'}}$$

in quo x ut quantitas constans tractetur, ita ut eva
Tum ponatur $z = 1$ atque id, quod provenit, aequat
ratione plerumque commodius aequatio pro curva quae

EXEMPLUM 1

438. Sit curva data ANB cyclois, ita ut sit

$$t = 2\sqrt{cu} \quad \text{seu} \quad dt = \frac{cd u}{\sqrt{cu}};$$

erit

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{c \cdot l \cdot \frac{a-2u-2}{a} \frac{V(u^2-au)}}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{c \cdot l \cdot \frac{a-2u-2}{a} \frac{V(u^2-au)}}} = \int \frac{du}{\sqrt{c \cdot l \cdot \frac{a+b-2u-2}{a} \frac{V(u^2-au)}}} \end{aligned}$$

Ponatur $u = a$ et habebitur

$$\begin{aligned} \sqrt{c \cdot l} - 1 &= \sqrt{c \cdot l \cdot \frac{b-a-2}{a+b} \frac{V(-a)}} \\ &= \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c \cdot l} (\sqrt{b} - \sqrt{-a}) + \sqrt{c \cdot l} \\ &= \pi\sqrt{c} + \sqrt{c \cdot l} \frac{\sqrt{b} + \sqrt{-a}}{\sqrt{b} - \sqrt{-a}} \end{aligned}$$

Ponatur xz loco b et habebitur

$$R = \pi\sqrt{c} + \sqrt{c \cdot l} \frac{\sqrt{xz} + \sqrt{-a}}{\sqrt{xz} - \sqrt{-a}};$$

quo multiplicato per

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z)'}}$$

habebitur

$$\frac{\pi dz \sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)'}} + \frac{dz \sqrt{c \cdot l}}{\sqrt{(1-z)'}} \cdot \frac{\sqrt{xz} + \sqrt{-a}}{\sqrt{xz} - \sqrt{-a}},$$

integrale est

$$-2\pi\sqrt{c}(1-z) - 2\sqrt{c}(z-1) \cdot l \frac{\sqrt{xz} + \sqrt{-a}}{\sqrt{xz} - \sqrt{-a}} - \frac{2\sqrt{-ac}}{\sqrt{x}} \cdot l \frac{\sqrt{z-1} + \sqrt{z}}{\sqrt{z-1} - \sqrt{z}} \\ - \frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}} \cdot l \frac{\sqrt{-a(1-z)} - \sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)} + \sqrt{z(a+x)}} + 2\pi\sqrt{c} - 2\sqrt{c}\sqrt{-1} \cdot l - 1,$$

et ultimi termini sunt inter se aequales ob $n = \sqrt{-1} \cdot l - 1$. Ponatur $c = 1$; habebitur

$$- \frac{2\sqrt{ac} + 2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}} \pi,$$

aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi^2}{\sqrt{x}}$. Hinc provenit ista aequatio

$$s = -2\sqrt{ac} + 2\sqrt{c(a+x)}$$

$$s + ANB = ANBM = 2\sqrt{c}(AD + BP).$$

et patet curvam BM' esse continuationem datae AND , ita ut con-
stituunt totam cycloidem constituant; id quod ex natura tautochronismi, cui
satisfacere inventa est, per se sequitur.

EXEMPLUM 2

39. Sit linea data ANB recta ad horizontem utcumque inclinata; erit
 du atque

$$\frac{du}{\sqrt{a+b-u}} = \int \frac{n du}{\sqrt{a+b-u}} = 2n\sqrt{a} - 2n\sqrt{a-u} - 2n\sqrt{a+b} + 2n\sqrt{a+b-u}.$$

Si $u = a$ atque $b = xz$; erit

$$R = 2n\sqrt{a} + 2n\sqrt{xz} - 2n\sqrt{a+xz}.$$

Abom erit

$$\int \frac{R dz}{\sqrt{1-z}} = 2n \int \frac{dz \sqrt{a}}{\sqrt{1-z}} + 2n\sqrt{x} \int \frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{1-z}} - 2n \int \frac{dz \sqrt{a+xz}}{\sqrt{1-z}} \\ + 4n\sqrt{a} - 4n\sqrt{a(1-z)} + 2n\sqrt{x} \int \frac{z dz}{\sqrt{(z-x^2)}} - 2n \int \frac{adz + xz dz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}.$$

Est vero

$$\int \frac{zdz}{V(z-zz)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{V(z-zz)} - V(z-zz)$$

postquam in integrali positum est $z = 1$. At

$$\int \frac{adz + xzdz}{V(a-az+xz-xz^2)},$$

si post integrationem ponatur $z = 1$, dat

$$Va + \frac{a+x}{2Vx} A. \frac{2Vax}{a+x}$$

denotante $A. \frac{2Vax}{a+x}$ arcum circuli radii $= 1$, cuius sinus est

$$\frac{\pi s}{Vx} = 4nVa + n\pi Vx - 2nVa - \frac{n(a+x)}{Vx}$$

hincque

$$s = nx + \frac{2nVax}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi} A. \frac{2Vax}{a+x}$$

Huius aequationis differentialis est

$$ds = ndx - \frac{n dx}{\pi} A. \frac{2Vax}{a+x} = \frac{sdx + nadx}{a+x}$$

Curva haec autem non ultra datam altitudinem poterit
usque, ubi erit $ds = dx$. Posito igitur $ds = dx$ erit

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi} A. \frac{2Vax}{a+x}$$

Fiat ergo ut $n:n-1$ ita semiperipheria circuli, cuius radius
eiusdem circuli, cuius cosinus sit m ; erit $\frac{a-x}{a+x} = m$ atque
fuerit angulus DAB 60° , erit $n = 2$ et $m = 0$ id est
Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior quam
at si ille angulus minor fuerit quam 60° , fore $x < a$. Quod
differentiali apparot, ut iam notavimus, in puncto B fore
perpetuo fieri $ds < ndx$ usque in F , ubi est $ds = dx$.

COROLLARIUM 3

1. Si linea recta $BN A$ fuerit horizontalis, erit $n = \infty$ et $a = 0$. Si
 sit $n \sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit

$$ds = \frac{s dx}{x} - \frac{2 dx \sqrt{fx}}{\pi x}$$

atione differentiali inventa, cuius integrale est

$$\frac{s}{x} = -2 \int \frac{dx \sqrt{f}}{x \sqrt{x}} = \frac{4 \sqrt{f}}{\pi \sqrt{x}}$$

$$s = \frac{4}{\pi} \sqrt{fx}.$$

ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curvae datae locum tenet.

COROLLARIUM 4

1. Si aequatio differentialis

$$ds = n da - \frac{n dx}{\pi} A \cdot \frac{2 \sqrt{ax}}{a+x}$$

differentietur posito dx constante, prodibit

$$dds = \frac{-n a dx^2}{\pi (a+x) \sqrt{ax}}$$

aequatione sequitur curvae in B radius osculi fore infinito parvum

SCHOLIUM 4

2. Ex aequatione generali differentiali

$$ds = \frac{-dx}{\pi} \left(\frac{2}{1} \alpha \sqrt{x} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \beta x \sqrt{x} + \text{etc.} \right) - \frac{dx}{2} \left(\xi + \frac{3}{2} \eta x + \text{etc.} \right)$$

semper fore $dds = \infty$ posito $x=0$, nisi fuerit $\alpha=0$. Quoties igitur
 erit $\alpha=0$, radius osculi curvae quaesitus in B erit $=0$. At si fuerit
 tum radius osculi curvae BMF in puncto B invenitur

$$= \frac{\xi^2}{3\eta} \sqrt{\left(\frac{\xi^2}{4} - 1 \right)}.$$

o in quovis exemplo proposito statim radius osculi curvae in puncto
 tescit.

EXEMPLUM 3

443. Si curva data ANB hanc habuerit aequationem, ut sit

$$dt = Cu^n du,$$

erit tempus per NA

$$= \int \frac{Cu^n du}{V(a+b-u)}.$$

Ponatur $a+b=f$ et $f-u=r^2$; erit $u=f-r^2$ et

$$u^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} r^2 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} f^{n-2} r^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} r^6 + \text{etc.}$$

Cum vero sit

$$\frac{du}{V(a+b-u)} = -2dr,$$

erit

$$\int \frac{Cu^n du}{V(a+b-u)}$$

$$= \text{Const.} - 2C \left(f^n r - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} r^3 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} r^5 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} r^7 + \right.$$

Quia autem haec quantitas evanescere debet facto $u=0$ seu $r=V$, quantitas illa constans addenda

$$= 2Cf^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \text{etc.} \right).$$

Ponatur nunc $u=a$ seu $r=Vb$ atque loco seriei

$$1 - \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} - \text{etc.}$$

ponatur N ; prodibit totum desensus per $BN A$ tempus

$$= 2CNf^{n+\frac{1}{2}}$$

$$- 2C \left(f^n Vb - \frac{n}{1 \cdot 3} f^{n-1} b Vb + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 5} f^{n-2} b^2 Vb - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} f^{n-3} b^3 Vb + \right.$$

estituatur $a + b$ loco f et orietur hoc tempus

$$= 2CN \left\{ a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)}{2} a^{n-\frac{1}{2}} b + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2 \cdot 4} a^{n-\frac{3}{2}} b^2 \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{n-\frac{5}{2}} b^3 + \text{etc.} \right\} \\ = 2C \left\{ a^n \sqrt{b} + \frac{2n}{1 \cdot 3} a^{n-1} b \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5} a^{n-2} b^2 \sqrt{b} \right. \\ \left. + \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} a^{n-3} b^3 \sqrt{b} + \text{etc.} \right\}.$$

hec igitur series cum serie assumpta hoc tempus experimento comparata

$$k = 2CN a^{n+\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{2n+1}{2} 2CN a^{n-\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2 \cdot 4} 2CN a^{n-\frac{3}{2}}, \\ \gamma = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} 2CN a^{n-\frac{5}{2}} \text{ etc.}, \\ \zeta = \dots 2C a^n, \quad \eta = \dots \frac{2n}{1 \cdot 3} 2C a^{n-1}, \quad \theta = \dots \frac{2n(2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5} 2C a^{n-2} \text{ etc.}$$

tunc oritur

$$ds = \frac{2CN a^n dx}{\pi} \left\{ \frac{(2n+1)\sqrt{x}}{1 \cdot \sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1 \cdot 3 \cdot a\sqrt{a}} \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2\sqrt{a}} + \text{etc.} \right\} \\ + C a^n dx \left(1 + \frac{nx}{1 \cdot a} + \frac{n(n-1)x^2}{1 \cdot 2 \cdot a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3} + \text{etc.} \right).$$

Huius vero seriei posterioris summa est $Cdx(a+x)^n$ huiusque integralis

$$\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}.$$

Quare post integrationem habebitur

$$s = \frac{C(a+x)^{n+1} - C a^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{4CN a^n \sqrt{x}}{\pi \sqrt{a}} \left(\frac{(2n+1)x}{3} + \frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3 \cdot 5 \cdot a} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2} + \text{etc.} \right)$$

Quae est aequatio pro curva quaesita BMT' , quae numero finito constat, quoties n fuerit terminus huius $\frac{6}{2}$ etc. Est vero

$$N = \int dp (1 - pp)^n,$$

si post integrationem ponatur $p = 1$. Hacquo facta

$$\int dp (1 - pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \int dp (1 - pp)^n$$

Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 - pp}} = \frac{\pi}{2},$$

erit $N = \frac{\pi}{2}$; si $n = \frac{1}{2}$, erit $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$, erit $N = \frac{3 \cdot 5 \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 8}$; si $n = \frac{7}{2}$, erit $N = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4}$ etc. At quia si $n = 1$, $N = \frac{2}{3}$; si $n = 2$, erit $N = \frac{2 \cdot 4}{8 \cdot 6}$; si $n = 3$, erit $N = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{8 \cdot 6 \cdot 4}$ etc. Ut si curva fuerit cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ ideoque erit

$$s = 2C\sqrt{a+x} - 2C\sqrt{a},$$

ut supra invenimus (§ 438).

SCHOLION 5

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic valor ex ipsa methodi natura intelligitur, si dt acquetur a summa terminorum, tum s aequalom fore aggregato terminis productarum. Hac igitur ratione, si curva series est quaerenda terminorum huius formae Cu^n . Atque ex iis omnibus debitus ipsius s valor obtinebitur lineae datae ANB haec

$$dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}},$$

us terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$, unde fit

$$s = 2\sqrt{c}(a+x) - 2\sqrt{ac};$$

r terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$ et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$, unde oritur

$$s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-2x}\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$$

va quaesita ergo sequente aequatione exprimitur

$$s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a-2x}\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$$

EXEMPLUM 4

445. Sit curva data circulus diametri c ; erit

$$dt = \frac{\frac{1}{2}cdn}{\sqrt{(cn-u^2)}} = \frac{1}{2}cdn \left(\frac{1}{\sqrt{cn}} + \frac{1 \cdot \sqrt{u}}{2 \cdot c \sqrt{c}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot u \sqrt{u}}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} + \text{etc.} \right).$$

to nunc quolibet termino seorsim et inveniatur valor ipsius ds ; habet
r colligendis omnibus

$$ds = \frac{cdx}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1 \cdot \sqrt{(a+x)}}{2 \cdot c \sqrt{c}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} \text{ etc.} \\ - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c \sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x \sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot a \sqrt{x}}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} \text{ etc.} \end{array} \right\}$$

quibus sequens aequatio nascitur

$$\begin{aligned} \frac{2ds}{cdx} &= \frac{1}{\sqrt{(a+x)(c-a-x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} \right) \\ &- \frac{a}{1 \cdot dx} d \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c \sqrt{c}} \right) \\ &- \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} dd \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c \sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x \sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} \right) \\ &- \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} d^3 \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1 \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot c \sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x \sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot c^2 \sqrt{c}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot c^3 \sqrt{c}} \right) - \text{etc.} \end{aligned}$$

o expressio in multas alias formas transmutari potest.

PROBLEMA

446. In hypothesi gravitatis uniformis deorsum quaecunque AM (Fig. 55), invenire curvam AN cuius peraguntur super curva composita MAN , sint omnes i

SOLUTIO

Sit datae curvae AM abscissa $AP = u$, arcus bitur ob curvam datam aequatio inter u et t . Dein

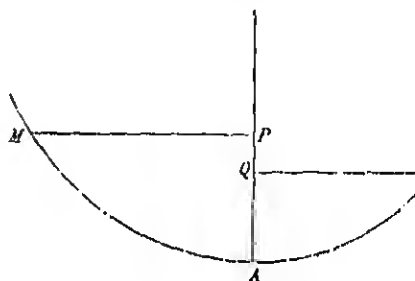


Fig. 55.

ponatur abscissa $AQ = x$ et arcus $AN = s$. Iam sit celeritas in puncto A debita altitudini b oriturque

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int \frac{ds}{\sqrt{(h-x)}}.$$

Atque si in hac expressione ponatur $u = b$ et $x =$ semioscillationis; quod cum debeat esse constans, littera b prorsus evanescere debet. Ponatur

$$dt = \frac{du \sqrt{f}}{\sqrt{u}} + P du \quad \text{et} \quad ds = \frac{dx \sqrt{h}}{\sqrt{x}}$$

eritque tempus unius semioscillationis

$$= \int \frac{du \sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int \frac{dx \sqrt{h}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int \frac{P du}{\sqrt{(b-u)}}$$

1) Vide L. EULERI Commentationem 12 (iudicis ERNSTROMI lautochronis in vacuo, Comment. acad. sc. Petrop. 4 (1729), Opera omnia, series II, vol. 4. P. St.

in b , habebitur id, quod quaeritur; at P et Q tales necesse est esse, quae b non involvant, quia in aequationes curvarum ingredi debent.

$$\int \frac{P du}{V(b-u)} = \int \frac{Q dx}{V(b-x)} + C$$

et $x = b$, si Q talis fuerit functio ipsius x , qualis P est ipsius u , nihil impedit, quo minus poni possit $x = u$, fiat $x = u$ oportebit P . Datur vero P ex aequatione curvae AM datae, quippe est

$$P = \frac{dt}{du} = \frac{Vf}{Vu}.$$

Curva quaesita haec habebitur aequatio

$$dx = \frac{du Vh}{Vu} = dt + \frac{du Vf}{Vu}$$

$$s + t = 2Vhu + 2Vfu;$$

functione determinatur natura curvae quaesitae AN . Q. E. D.

COROLLARIUM I

Si igitur $AP = u = x$ (Fig. 56), cum sit $AM = t$ et $AN = s$, erit

$$AN + MA = t + s = 2(Vf + Vh)VAP,$$

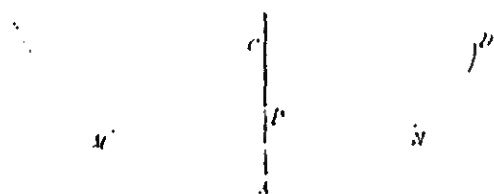


Fig. 56

arcum eidem abscissae respondentium proportionalem est radici abscissae AP .

COROLLARIUM 2

448. Curva igitur quaesita AND ita debet esse, ut arcum $AM + AN$ aequalis sit areni cycloidis AND dentis. Ex qua proprietate sponte fluit omnes os

COROLLARIUM 3

449. Tempus ergo unius oscillationis aequatur tempori cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2L$. Huius longitudinis producet semioscillationes minores, quibus super curva MAN . Pendulum vero peraget totas oscillationes isochronas.

COROLLARIUM 4

450. Quia quantitatem h pro lubitu accipere possunt, satisfaciunt; atque etiam ea poterit determinari, datae quantitatis. Ut si una oscillatio isochrona penduli longitudinis $\frac{L}{4}$, erit

$$L = 2(\sqrt{f} + \sqrt{h})^2 \quad \text{ideoque} \quad \sqrt{h} = \frac{L}{2} - \sqrt{f}.$$

Quare L minus esse debet quam $2f$.

COROLLARIUM 5

451. Si data curva AM fuerit cyclois seu cycloide, erit quoque cyclois quaecumque; fit enim $ds = \sqrt{2u}$ huiusmodi cycloidibus non solum integrae oscillationes, etiam singuli ascensus et descensus super quos eodem tempore.

EXEMPLUM 1

452. Sit curva data AM recta utcumque ad $dt = ndu$; prodibit pro curva quaesita posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$

$$ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - ndu = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}}$$

etur $PN = y$, erit

$$dy = dx \left[\left(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2}x} \right) + n^2 - 1 \right],$$

ut longitudinem penduli isochroni; ex qua aequatione curva erit construi. Curva autem in D habebit punctum reversionis item verticalem, quod habebitur sumendo $AC = \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curvae vero loco A radius osculi est L .

eterea notandum est, si $n = 1$, quo casu linea AM sit recta AC incidens, fore curvam quaesitam abgelesicam; erit namque

$$dy = \frac{dx\sqrt{(L - 2\sqrt{2}Lx)}}{\sqrt{2}x},$$

ut est.

$$y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L - 2\sqrt{2}Lx})\sqrt{(L - 2\sqrt{2}Lx)}}{3}$$

$$3y^2 = 6Ly - \frac{6L}{3}\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx},$$

rationalitate prorsus liberata sit quatuor dimensionum. Huius in D habebitur sumendo $AC = \frac{L}{n}$, quo casu sit $CD = \frac{L}{3}$.

EXEMPLUM 2

si curva data AM circulus radii a ; erit

$$dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au - a^2)}}.$$

in $\frac{L}{2}$ loco $\sqrt{f} + \sqrt{h}$ erit

$$dx = \frac{da\sqrt{L}}{\sqrt{2a}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au - a^2)}} - \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2}x} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

ratione sequitur

$$dy = dx \left[\left(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{\sqrt{4a - 2x}} \right) + \frac{a^2}{2ax - x^2} - 1 \right],$$

Cuspis curvae AND erit, ubi est

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

seu

$$4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 \\ - 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8$$

Ponatur $L = a$; fiet

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3$$

At si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4$$

unde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo pon

SCHOLIUM

454. Si igitur efficiatur, ut pendulum in h
oscillationes peragat, eius oscillationes aeque an
cycloide moveretur. Atque hanc ob rem quocun
nismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio is
curvam datam comparatam esse oporteat, ut inver
continuam constituat, id quod sequente propositione

1) Ex aequatione

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

sequitur

$$4x^4 - 4Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 + 16aLx^2 \\ - 4aL^2x - 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8$$

Posito $L = a$ fit

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 20ax^2 + 41a^2x - 8a^3$$

at si $L = 2a$, erit

$$x^4 - 6ax^3 + 15a^2x^2 - 14a^3x + a^4$$

unde concluditur valorem $x = a$ problemati non satisfacere.

PROPOSITIO 52

PROBLEMA

*hypothesi gravitatis uniformis deorsum tendentis invenire curvam
 N , super qua omnes semioscillationes absolvantur æqualibus temporibus.)*

SOLUTIO

curva MAN (Fig. 56, p. 207) curva continua in capite AP et x
 $AN = s$. Assumatur nova indeterminata z atque x et t ita
ut posita z affirmativa prodeat curvae pars AM , ut posita z
sit curvae pars AN . Quia nunc pro utraque parte x eundem
m, debet z talis esse functio ipsius x , quæ eadem maneat,
sive auctetur sive negetur, seu x debet esse functio par
inde t circuli esse debet functio ipsius z , ut prodeat s , si
hæc z . At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius
sive respectu curvae AM ; quare, si in valore ipsius t ponatur
radice debet $= s$. Sit nunc R functio impar ipsius z et S eius
ponatur $t = R + S$; fiet $= s = R + S$ seu $s = R = S$; unde fit
Sit longitudo penduli isochroni $= a$; quia est $\sqrt{2}a = \sqrt{f} + \sqrt{h}$,
 $t = s = 2\sqrt{2}ax$ hincque erit $R = \sqrt{2}ax$ et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quin
 t esse functio par ipsius z , ex hac expressione id per se
enim R sit functio impar, eius quadratum erit functio par,
 x ; erit $x = \frac{1}{2}aR^2$ atque S debet esse functio par ipsius
 z . Quo facto habebitur ista æquatio

$$s = \sqrt{2}ax + S$$

curvis continuè tantochronis. Sit $dS = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$; erit T functio
atque ipsius z . Quapropter fiet

$$ds = \frac{adx + Tdx}{\sqrt{2ax}}$$

Ecce in Commentationem 12 (indice ERESTMANNI): *De*
er, Comment. Acad. sc. Petrop. 4 (1729), 1735, p. 49
et Opera omnia, Actes II, vol. 4. — P. 86.

atque

$$dy = \frac{dx \sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$$

posito $PN = y$. Ex qua aequatione infinitae curvae reperiuntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

456. Curva igitur hoc modo inventa AN est: et parte continua AM . Dantur vero per praecedens curvae AM , quae cum AN coniunctae oscillationes

COROLLARIUM 2

457. Per praecedentem propositionem omnis curvae aequatio

$$t = \sqrt{2cx} + S \quad \text{seu} \quad dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} +$$

oscillationes isochronas cum curva AN producit. longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

COROLLARIUM 3

458. Inter has ergo infinitas curvas AM cum AN producentes ea est continua cum AN , in qua oscillatio penduli isochroni fit $= a$, ut assumimus.

COROLLARIUM 4

459. Si ponatur $c = 0$, erit cum curva AN curva AM , cuius aequatio est

$$dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$$

seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $T = \sqrt{2bx}$, toties quoque linea recta cum AN tantum ita fuerit inclinata, ut anguli MAP secans sit $\sqrt{\frac{b}{a}}$.

T teneat esse quantitas affirmativa, saltem in initio A . Si enim T in initio A evanescat posito $x = 0$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen, si $s = y$ in hoc loco erit $= a$ ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a , ut assumimus.

COROLLARIUM 6

461. Si igitur T evanescit posito $x = 0$, radins osculi in A , qui est initium $s = y$ in hoc loco erit $= a$ ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a , ut assumimus.

COROLLARIUM 7

462. Curvae portio AN habebit in D tangentem verticalom ibidem cuspidem; quod punctum invenitur ex hac aequatione

$$a - T = \sqrt{2ax}$$

tirando $AC =$ valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars ND habebit cuspidem, si alicubi fuerit

$$a + T = \sqrt{2ax}.$$

COROLLARIUM 8

463. Si fuerit $S = 0$ et $T = 0$, erit $s = \sqrt{2ax}$. Quare curva erit cyclois portio AN aequalis et similis curvae AM . Est ergo cyclois continua, super qua omnes oscillationes absolventur eodem tempore.

EXEMPLUM

464. Sit $T = \sqrt{2bx}$, quo casu curva AN quoque est tautochrone. Si AC angulum constituto, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit

$$ds = \frac{a dx - dx \sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}, \quad \text{atque} \quad s = \sqrt{2ax} - \frac{x \sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Habebitur autem

$$dy = \frac{dx \sqrt{(a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx - 2a)}}{\sqrt{2ax}}$$

Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in § 451 pro curva invenimus, quae cum recta tautochrona modo scribatur L pro a et n pro $\sqrt[3]{a}$. Quare si fuerit algebraica invenitur NAM , quae est tautochrone, cui

$$dy = dx \sqrt[3]{a - 2\sqrt{2ax}}$$

et integralis haec

$$3y = a - (\sqrt[3]{a - 2\sqrt{2x}}) \sqrt[3]{(a - 2\sqrt{2x})^2}$$

Quae est ea ipsa curva, quae cum recta verticali tautochrone supra invenimus (§ 452). Longitudo vero penduli isochroni in hac curva oscilletur. At si moveatur super recta AC longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit $AC = \frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Tautochrone algebraica aliae vix inveniri potest.

CAPUT TERTIUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE

PROPOSITIO 53

PROBLEMA

. Si corpus sollicitetur deorsum a potentia uniformi g in medio quocunque
e, determinare motum corporis descendantis super data curva AM (Fig. 57)
nem, quam curva in singulis punctis sustinet.

SOLUTIO

tur in verticali AP abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus
s sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia
 $= R$. Manifestum iam est ex capite praecedente [§ 93], si nulla esset
ia, fore

$$dv = gdx.$$

tia vero minuit hoc celeritatis incre-
et aequipollet vi tangentiali $= R$;
solius effectus in hoc consisteret, ut

$$dv = - Rds.$$

rem si et potentia sollicitans g et re-
 R ambae simul in corpus agunt, erit

$$dv = gdx - Rds,$$

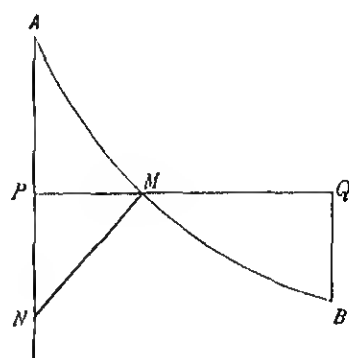


Fig. 57.

ex qua aequatione celeritas corporis in quovis puncto M si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita est in $x=0$ prodeat quoque $v=0$. Verum si data cum celeritate descensum inceperit, in integratione officii debet, ut aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum a celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quivis arcus sumendo $\int \frac{ds}{V}$. Quod ad pressionem, quam curva in M dupli-
 curva in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet et vi
 curvam esse convexam deorsum et elementum dx consi-
 radii osculi in contrariam partem normalis MN directi

$$= \frac{ds^3}{dx dy},$$

unde vis centrifuga orit

$$= \frac{2v dx dy}{ds^3},$$

qua curva secundum directionem MN premitur. Secun-
 directionem curva premetur a vi normali, quae est

$$= \frac{g dy}{ds},$$

vis normalis enim a potentia absoluta g tantum oritur
 vis resistentiae est in tangente sita ideoque nullam vim
 Consequenter tota vis, qua curva in M secundum directi-
 premitur, est

$$= \frac{g dy}{ds} + \frac{2v dx dy}{ds^3}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

466. Expressio orgo vis curvam premontis congrui
 vacuo invenimus [§ 83]. Neque tamen curva in modio
 premitur qua in vacuo ob celeritatem, a qua vis centri-
 modio resistente variatur.

COROLLARIUM 2

467. In isto descensu corpus non ut in vacuo ma-
 tatem in puncto B , in quo tangens est horizontalis, sed

quo corpus maximam habet celeritatem, invenitur ex hac aequatione

$$gdx = Rds \quad \text{sen} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{R}{g}$$

In eo puncto, ubi sinus anguli, quem tangens curvae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum ut potentia absoluta g ad resistantiam R eo loco.

COROLLARIUM 3

468. Celeritas corporis igitur augetur usque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; ultra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, cum Rds excedit gdx et hanc ob rem fit dv negativum.

COROLLARIUM 4

469. Si resistantia fuerit ut potestas quaecunque celeritatum, cuius exponentis est $2m$, et si modum resistens fuerit uniforme, cuius exponentis est k , ubi k est altitudo celeritati debita, quaecumque corpus movetur, resistantia fit vi gravitati aequalem; hoc ergo casu oritur

$$R = \frac{v^{2m}}{k^m}$$

quo ista habebitur aequatio ad motum definiendum

$$dv = gdx - \frac{v^{2m} ds}{k^m}.$$

COROLLARIUM 5

470. Sin autem abscissae in axe BQ capiantur fueritque $BQ = y$ et $BM = s$, propter harum quantitatum differentia negativa respectu priorum habebitur

$$dv = -gdx + Rds.$$

Quae aequatio ita est integranda, ut posito $x=0$ fiat $v=b$, si quae celeritas in B , quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini debita. At pressio secundum MN , quam curva sustinet, est

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}.$$

471. Si media fuerit uniforme, cuius exponens sit functioni cuicumque ipsius v , quae sit V , proportionalis, functio ipsius k , qualis V est ipsius v ; erit resistentia habebitur ista aequatio

$$dv = -gdx + \frac{Vds}{K}$$

sunto axe BQ .

SCHOLION 1

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis pro duobus axibus AP et BQ , quia in sequentibus mox habebitur. Scilicet quando descensus semper fit ex fixo puncto ut in formula AP pro axe sumente. At si in eadem curva plura puncta fixa usque B sint considerandi, ut in motu oscillatorio, in posteriore formula atemur, in qua BQ pro axe habetur.

SCHOLION 2

473. Quia formula, ex qua motus corporis super data linea debet, ita est comparata, ut indeterminatae paucis casibus separari queant, saepe ex ea nihil, quod ad motum speciat, evolvitur. Quamobrem eos tantum casus evolvere convenit, quibus ad

$$dv = \pm gdx + \frac{Vds}{K}$$

vel separari vel integrari potest. Hi autem casus omnes in generales reducuntur. Primus est, quando linea, super qua motus est, recta; tum enim ob $ds = n dx$ aequatio transit in hanc

$$\frac{\pm K dv}{gK \pm nV} = dx,$$

in qua indeterminatae sunt a se invicem separatae. Secundus est, quando in V unicam tantum obtinet dimensionem v ; tunc integrationem admittit. Tertius casus est, quando tam v

curva ita est comparata, ut in aequatione v et x ubique eundem dimensionem
 amernum constituent; tum enim per regulam notam BERNOULLIANAM¹⁾ inde
 inatae a se invicem possunt separari. Hoc autem evenit, si in Vds un
 erit dimensio ipsarum v et x . Praeter hos quidem casus essent duo
 integrationem admittentes, sed qui huc non pertinent. Primus est, si r
 entia evanescit, qui vero casus in praecedente capite iam sufficienter
 tractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans g evanescit; de
 tem non est opus, ut agamus, quia motus super quacunque linea cong
 m mota super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dict
 praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fu
 $= x^2$, quoties scilicet aequatio pro curva ita est comparata, ut aequa
 casum aequationis, quam quondam Com. RICCARDI proposuit, potest red
 eneraliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi at
 ita expressione definiri, quomadmodum ego generalem aequationis RICCARDI
 di constructionem.²⁾ Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres ca
 positos subiunde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato cel
 tis est proportionalis, evolvemus.

SCHOLIUM 3

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est d
 is et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, ut capite p
 edente fecimus, eam accommodabimus, sed nobis perpetuo potentia sollicit
 it uniformis et deorsum directa neque de viribus contripetis multum orin
 illiciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur uniformis, medium resist
 loque tuto poni conveniet; fluidum enim, quod resistentiam generat, ip
 rporis gravitationem minuit, et si id non esset uniforme, potentia absol
 m recto uniformis poneretur. Doinde etiam propter eandem rationem c
 m, in qua corpus movetur, totam in eodem plano positam assumemus, a
 ultas difficultates nullam utilitatem afforantes removeamus.

1) ION. BERNOULLI, *De integrationibus aequationum differentialium, ubi traditur methodus*
specimen integrandi sine praevia separatione indeterminatarum, Comment. acad. sc. Petro
 726), 1728, p. 167; *Opera omnia* Tom. 3, Lausannae et Genesae 1742, p. 108. P. St.

2) Vide notam p. 196. P. St.

PROBLEMA

475. Si corpus perpetuo sollicitetur deorsum a potentia quocunque resistente, determinare motum corporis super de ascendente et pressionem, quam curva in singulis punctis

SOLUTIO

In verticali AP posita abscissa $AP = x$, $PM = y$, P est punctum quodvis, A est punctum in quo vis resistens est maxima, M est punctum in quo vis resistens est minima, D est punctum in quo vis resistens est nulla. R est vis resistens in M , $R = R$. Erit igitur, tam potentia sollicitans quam vis resistens motui contraria. Hanc visum modo quo in precedenti

$$dx = -g dy$$

Ex qua aequatione v ut facto $x = 0$ fiat resistens in pressione, non ingrediatur, tota, quam curva in M

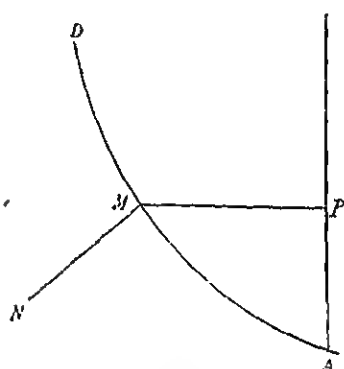


Fig. 68.

normalis MN sustinet,

$$= \frac{g dy}{ds} - \frac{2v dx ddy}{ds^3}$$

posito dx constante; ubi $\frac{g dy}{ds}$ denotat vim normalem et fugam, utramque iuxta MN directam. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

476. In ascensu corporis ergo super quacunque perpetuo immittitur atque punctum curvae D repositum, ascendente celeritas evanescit, si in aequatione dx integrationem ponatur $v = 0$.

COROLLARIUM 2

7. Si corpus super curva DMA descenderet, haberetur ista aequatio

$$dv = -gdx + Rds$$

ex qua intelligitur ascensum non esse similem descensui ut in vacuo. resistantia fieret negativa seu accelerans, tam ascensus similis foret ni. Quare descensus in medio resistente congruet cum ascensu in tantumdem accelerante et vicissim.

COROLLARIUM 3

8. Quoniam aequatio pro ascensu hoc tantum differt ab aequatione descensu, quod resistantia R valorem induat negativum, intelligitur casibus, quibus aequatio pro descensu separari vel integrari potest, quoque aequationem pro ascensu simili modo tractari posse.

COROLLARIUM 4

9. Si fuerit $R = \frac{V}{K}$, erit pro ascensu super curva AM haec aequatio

$$dv = -gdx - \frac{Vds}{K}$$

descensu habetur

$$dv = -gdx + \frac{Vds}{K}$$

si illa aequatio poterit integrari, simul quoque huius aequationis ut integrale ponendo tantum $-K$ loco K .

alia problemata, in quibus harum quatuor rerum — resistentiæ, siones et curvæ — duæ dantur, reliquæ duæ requiruntur. Habet quoque problemata indeterminata, quibus omnes curvæ requiruntur, quibus corpus descendens vel eandem celeritatem acquirit vel tempore absolvit. Tam sequetur doctrina de lineis brachystocæ tandem caput concludet de motu oscillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55

PROBLEMA

481. *In medio resistente uniformi quocunque et hypothesis gravitatis determinare motum corporis descendantis super linea recta AMB (Fig. 69) zontem ulcunque inclinata.*

SOLUTIO

Posita $AP = x$ erit $AM = s = nx$; et quia medium resistente forme, erit resistuntia $R = \frac{v}{K}$. Posita ergo altitudo celeritatis $= v$ erit

$$dv = gdx \cdot \frac{nVdx}{K}$$

(§ 465). Unde fit

$$\frac{Kdv}{gK - nV} = dx,$$

in qua æquatione indeterminatae sunt a se ratæ; erit ergo

$$x = \int \frac{Kdv}{gK - nV},$$

in qua integratione efficiendum est, ut positum $v = 0$, si quidem descensus in A ex quieto incipiat. Sin vero tatem initialem, hæc per integrationem est introducenda. spatium AM est

$$= \int \frac{ndx}{\sqrt{v}}.$$

Posito ergo loco dx eius valor in v habebitur tempus per AM

$$= \int \frac{nKdv}{(gK - nV)\sqrt{v}},$$

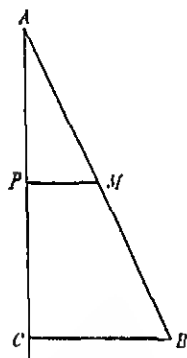


Fig. 69.

tegrale ita est sumendum, ut posita $Vv =$ celeritati initiali in A et. Pressio vero, quam linea in quovis puncto M sustinet, est con-
tempo aequalis vi normali

$$= \frac{gdy}{ds} = \frac{gV(n^2 - 1)}{n},$$

centrifuga evanescit ob $ddy = 0$. Q. E. 1.

COROLLARIUM 1

1. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$.
Cum fuerit $gK = nV$, corpus neque accelerabitur neque retardabitur.
Cum vero corporis celeritas, si in initio A fuerit $nV > gK$.

COROLLARIUM 2

2. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat, motus perpetuo
ita tamen, ut semper sit $gK > nV$, quippe quae est ultima celeritas,
descensu per infinitum spatium denum acquirit.

COROLLARIUM 3

3. Quo maior ergo est angulus BAC , eo minor est ultima, quam
acquirero potest, celeritas. Maximam vero celeritatem ultimam, qua
iter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC .

COROLLARIUM 4

4. Si resistantia fuerit ut potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$
 k^n , unde ista habebitur aequatio

$$x = \int \frac{k^n dv}{gk^n - nv^m}$$

tempus per AM

$$= \int \frac{nk^n dv}{(gk^n - nv^m)Vv}.$$

EXEMPLUM 1

486. Resistat medium in simplici ratione celeritat.

$$dv = gdx - \frac{ndx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Hinc fit

$$x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{k}v}{n} + \frac{2gk}{n^2} \ell \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}.$$

vel per seriem

$$x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v^2}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$$

si quidem descensus in A ex quiete incipiat. Tempus AM erit

$$= \int \frac{ndv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}v - nv} = 2\sqrt{k} \ell \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}.$$

Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit

$$nx + 2\sqrt{k}v = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$$

atque in serie

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^3v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}} +$$

Si ergo corpus in descensu per AB acquisivit celeritatem, ex hac reperitur altitudo

$$AC = -\frac{2\sqrt{k}v}{n} + \frac{2gk}{n^2} \ell \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}.$$

EXEMPLUM 2

487. Resistat medium in duplicata ratione celerit.

$$x = \int \frac{kdv}{gk - nv} = \frac{k}{n} \ell \frac{gk}{gk - nv},$$

si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoat. Numerus, cuius logarithmus est unitas, erit

$$c^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv} \quad \text{atque} \quad v = \frac{gk \left(c^{\frac{nx}{k}} - 1 \right)}{nc^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n} \left(1 - c^{-\frac{nx}{k}} \right).$$

rem, si corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit

$$AC = \frac{k}{n} \log \frac{gk}{gk - nb}.$$

corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudinis debitam. Tempus vero per spatium AM erit

$$\int \frac{nkdv}{(gk - nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} \log \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}.$$

series tam spatium x quam tempus commode exprimitur; id quod et pro quovis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

EXEMPLUM 3

Sit resistentia ut potestas exponentis $2m$ celeritatum; erit

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m};$$

expressio in seriem conversa dabit

$$dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{3m} dv}{g^3 k^{3m}} + \text{etc.}$$

invenitur

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{3m+1}}{(2m+1)g^3 k^{3m}} + \frac{n^3 v^{5m+1}}{(3m+1)g^4 k^{5m}} + \text{etc.}$$

si ponatur tempus per $AM = t$, quia est

$$dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}},$$

$$t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m} \sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{3m}} + \frac{2n^4 v^{3m} \sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{5m}} + \text{etc.}$$

tur differentia et dividatur per bdq ; habebitur

$$qdx + xdq = \frac{1}{g} + \frac{b^m q^m}{g^2 k^m} + \frac{b^{2m} q^{2m}}{g^3 k^{2m}} + \text{etc.} = \frac{k^m}{g k^m - b^m q^m}$$

$$qdx + xdq = \frac{bk^m dq}{g k^m - b^m q^m}.$$

nia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$, ponatur $\frac{z^m}{x^m}$ loco q et prodibit

$$z^{1-m} x^{m-1} dz + (m-1) z^m x^{m-1} dx = \frac{bk^m z^{1-m} x^{m-1} dz}{g k^m x - b^m z} - \frac{bk^m z^m x^{m-1} dx}{g k^m x - b^m z}.$$

multiplicata per $x^m z^{m-1}$ abit in hanc

$$x dz + (m-1) z dx = \frac{bk^m x dz}{g k^m x - b^m z} - \frac{bk^m z dx}{g k^m x - b^m z}.$$

tractio autem curvae facilius sequitur ex aequatione

$$qx = \int \frac{bk^m dq}{g k^m - b^m q^m}.$$

t autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet, si fuerit $\frac{gk^m}{b^m}$, tam $\frac{g^m}{b}$ acquari seriei harmonicæ

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1} + \text{etc.}$$

no esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit

$$q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m},$$

uo perspicitur rectam AB fore curvae asymptoton et cosinum anguli B fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curvae C a puncto A distantia AC aequalis

uic seriei

$$\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \text{etc.}$$

t autem esse necessario $b^m < gk^m$; alias enim vertex C a puncto A in-

distantet. Q. E. I.

490. Si applicata PM vocetur y , erit

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

quibus valoribus in aequatione inventa substitutis habet

$$xydy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^m y(xd}{gk^m x - b^m}$$

COROLLARIUM 2

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$; transi-
in hanc

$$xpdp + m dx + mp^2 dx = \frac{bk^m p dp}{gk^m - b^m \sqrt{1 + p^2}}$$

quae aequatio per $(1 + p^2)^{\frac{1-2m}{2}}$ multiplicata sit integr-

$$m(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} x = \int \frac{bk^m p dp (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{gk^m - b^m \sqrt{1 + p^2}}$$

quae expressio per quadraturas officii potest.

COROLLARIUM 3

492. Si resistentia evanescat corpusque in vac-
finitum; atque ex supra data serie invenitur $qx = \frac{bq}{g}$
scitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

SCHOLION 1

493. Quia autem ex hac aequatione generali
curvae potest concludi, in exemplis specialibus hanc
prosequemur. Talia autem assumemus exempla, in quibus
integrationem saltem per logarithmos admittit, quibus
perveniamus, ex quibus facile erit curvae naturam per-

1) Ex hac paragrapho concludi potest EULERO formulam Cor-
fuisse. P. St.

EXEMPLUM 1

Sit igitur resistentia ipsis celeritatibus proportionalis; erit $m = \frac{1}{2}$.
 $AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debet altitudini b , erit

$$a = -2\sqrt{bk} + 2gkl \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}$$

Deinde vero erit

$$\sqrt{q} = \frac{z}{x} \quad \text{scilicet} \quad q = \frac{z^2}{x^2}$$

$$qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}q},$$

Integralo ita est accipiendum, ut posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel
 ori assignato. Erit ergo

$$qx = -2\sqrt{bk}q + 2gkl \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}q},$$

quatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc

$$z^2 = -2z\sqrt{bk} + 2gkxl \frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k} - z\sqrt{b}},$$

, fit

$$x = a = -2\sqrt{bk} + 2gkl \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

sem $q = 1 + dq$; habebitur

$$dx + xdq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{b}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC , erit $\sqrt{dq} = \sinui$ huius anguli. Quam-
 incrementum ipsius x infinites minus est quam incrementum anguli
 incidento MA in CA , ex quo sequitur tangentem curvae in C esse
 alem; huiusque curvae tangens in infinito seu asymptota erit AE
 e anguli EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curva ex altera verticalis
 to arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD .

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$

$$AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$$

Augeatur n elemento dn ; habebitur incrementum

$$= \frac{b^{m+1}dn}{(m+1)g^2k^m} + \frac{2b^{2m+1}ndn}{(2m+1)g^2k^{m+1}}$$

Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC ideoque sin $1 + dn$ loco n . Quamobrem incrementum ipsius AC quam incrementum anguli; atque ideo AC norma

EXEMPLUM 2

496. Sit resistentia quadratis celeritatum positoque $AC = a$ crit

$$a = kl \frac{gk}{gk - b} \quad \text{atque} \quad b = \frac{gk}{gk - a}$$

Doinde vero est

$$q = n = \frac{z}{x}$$

atque

$$qx = z = \int \frac{bk dq}{gk - bq} = kl \frac{gk}{gk - bq}$$

Habebitur ergo

$$e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx - bz},$$

undo sequitur

$$x = \frac{e^{\frac{z}{k}} bz}{gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)} = \frac{e^{\frac{z}{k}} z (e^{\frac{a}{k}} - 1)}{e^{\frac{a}{k}} (e^{\frac{z}{k}} - 1)}$$

posito loco b eius valore in a . Ad curvam dissimilissimè adhibetur haec aequatio

$$z = kl \frac{gk}{gk - bq},$$

in qua z est AM et q est secans anguli MAC .

SCHOLION 3

97. In solutione problematis ad inveniendam aequationem curvae CMD imus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem sine serie-
quenti modo elicere licet. Quia est

$$x = \int \frac{k^m dx}{gk^m - nv^m},$$

ipsa aequatio exprimit naturam curvae quaesitae, si post integra-
n ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n . Quamobrem si

$$\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$$

entietur, posito non solum v , sed etiam n variabili, atque tum ponatur
stans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n , habebitur aequatio differentialis pro curva quae-

Ad hoc efficiendum pone $n = \frac{1}{p^m}$, quo predeat

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}.$$

nus brevitas gratia

$$\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$$

aequatio differentialis haec

$$dx = Pdv + Qdp,$$

am p variabilis accipiatur. Quia autem P est functio nullius dimensi-
ipsarum v et p , erit

$$x = Pv + Qp$$

uo

$$Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}.$$

igitur loco Q valore substituto praebet

$$pdx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m p^m - v^m} + xdp.$$

tuatur $n = \frac{1}{p^m}$ loco p et erietur

$$mndx + xdn = \frac{mk^m ndv + k^m v dn}{gk^m - nv^m},$$

in qua aequatione n aeque variabilis est assumpta
 $r = b$, $dr = 0$ et $n = \frac{z}{x}$ atque habebitur ista aequ

$$x dz + (n - 1)z dx = \frac{bk^m(x dz - zk^m x -$$

quae cum aequatione supra inventa congruit.

PROPOSITIO 57

PROBLEMA

498. Si resistentia fuerit in quacunque multipli
 care curram AMC (Fig. 61) huius proprietatis,
 quavis sublensa AM dato tempore ex A ad M perve

SOLUTIO

Ducta verticali AC ponatur $AP = x$, $AM = z$
 altitudine celeritati in M debita $= v$ et resistentia
 corpus per AM descendit, $= k^m$
 constans. Habebimus ergo ex

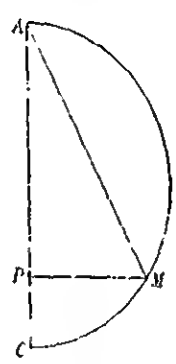


Fig. 61.

$$x = \int \frac{k^m dv}{gk^{in} - n v^m} \quad \text{et}$$

(§ 485). Quocirca ad naturam
 opus est, ut utraque aequatio
 integretur et valor ipsius v ex
 substituatur atque tum loco

habebitur aequatio inter x et z naturam curvae
 integrationes non commode perfici poterunt, utruque
 ponendo quoque n variabili, et postquam positum
 tionibus inventis eliminari debet v , quo proder

continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curvae quaesitae. Ad hoc
natur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus

$$x = \int \frac{k^m p^m dv}{g k^m p^m - v^m} \quad \text{et} \quad t = \int \frac{k^m dv}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}}.$$

Quarum aequationum illius, sumto quoque p variabili, differentialis iam
inventa

$$p dx - x dp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{g k^m p^m - v^m}$$

(§ 497). Ad alteram aequationem differentiandam pono

$$\frac{k^m}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}} = P$$

sitque

$$dt = P dv + Q dp.$$

Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m - \frac{1}{2}$, erit

$$\left(\frac{1}{2} - m\right)t = Pv + Qp$$

atque hinc

$$Q = \frac{(1 - 2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}.$$

Quo valore loco Q substituto prodibit

$$p dt = \frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}} + \frac{(1 - 2m)t dp}{2}.$$

Sit nunc $t = 2\sqrt{c}$ atque $dt = 0$; habebimus

$$(2m - 1) dp \sqrt{c} = \frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m) \sqrt{v}}.$$

Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proveniet

$$p dx - x dp = (2m - 1) p^m dp \sqrt{c} v$$

son

$$\sqrt{v} = \frac{p dx - x dp}{(2m - 1) p^m dp \sqrt{c}} = \frac{dr}{(2m - 1) p^{m-2} dp \sqrt{c}}$$

$$(2m-1)dp\sqrt{c} = \frac{v(pdv - vdp)}{(gk^m p^m - v^m)}$$

vel in hac

$$\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m(pdv - vdp)}{gk^m p^m - v^m}.$$

Casu quidem, quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia colerital
 $p dv = v dp$ seu $v = ap$ et

$$p = \frac{x}{a} = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz},$$

unde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac res
 AMC est circulus omnino ut in vacuo. In aliis h
 aequatio alterutra integrotur, eliminata v habebit
 differentialis inter z et x naturam curvae exprimens.

COROLLARIUM 1

499. Si ponatur $v = up$, erit

$$p dv - v dp = p p du.$$

Atquo hinc erit

$$\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{1}{2}}dp\sqrt{c}},$$

qui valor substitutus in aequatione

$$dr = \frac{k^m du}{gk^m - u^m}$$

dabit aequationem inter p et r , ex qua aequatio inter

COROLLARIUM 2

500. In medio ergo, quod resistit in simplici coler
 curvam AMC esse circulum. Atquo ideo in hac resis
 pora descensuum per singulas circuli chordas ox punct
 se aequalia.

EXEMPLUM 1

501. Sit resistentia quadratis celeritaturn proportionalis; erit $m =$
ne

$$x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$$

$$n = \frac{gk}{n} \left(1 - e^{-\frac{nx}{k}} \right).$$

eterea vero erit

$$t = 2 \sqrt{c} = \frac{\sqrt{nk} l \sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}}$$

$$e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{nv}}{\sqrt{gk} - \sqrt{nv}},$$

e fit

$$v = gk \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1 \right)^2}{n \left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1 \right)^2}.$$

minata ergo v et $\frac{x}{n}$ posito loco n habebitur

$$\frac{e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{nk}}} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{nk}}} + 1} = \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{nk}}} - 1 \right)^2}{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{nk}}} + 1 \right)^2}$$

$$\frac{2\sqrt{gc}x}{\sqrt{nk}} = l \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}}}.$$

hac curva est

$$AC = k l \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1 \right)^2}{2\sqrt{gc}} = 2kl \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{-\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2} -;$$

gitur ponatur $AC = a$, erit

$$2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{-\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}},$$

unde erit

$$e^{\frac{Vz}{V^k}} = e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1)$$

seu

$$V \frac{ge}{k} = l(e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1)).$$

Erit igitur

$$Vxl(e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1)) = Vz l(e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1))$$

aequatio pro curva AMC . Si resistentia fuerit valde parva, o
vehementer magna atque ideo

$$e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1) = 1 + \frac{z}{2k} + V\left(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2}\right) = 1 + V\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k}$$

huiusque logarithmus erit

$$= \frac{Vz}{V^k} + \frac{z}{12k} \frac{Vz}{V^k}.$$

Simili modo erit

$$l(e^{\frac{a}{2k}} + V(e^{\frac{a}{2k}} - 1)) = \frac{Va}{V^k} + \frac{a}{12k} \frac{Va}{V^k}.$$

Atque hanc ob rem habebitur pro curva AMC haec aequatio

$$Vax + \frac{a}{12k} Vax = z + \frac{z^2}{12k}$$

seu

$$ax\left(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}\right) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}.$$

Unde perspicitur, si resistentia prorsus evanescat seu k fiat in
fore $ax = z^2$ atque ideo curvam AMC circulum. At si modi
fuerit, erit

$$ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$$

et differentiendo

$$adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2dz.$$

Si nunc fiat $zdz = xdx$, habebitur applicata PM maxima
tangens curvae est verticalis, scilicet

$$a^2 + 6ak = 12kx + 3xz \quad \text{seu} \quad x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z},$$

$$(6ak + a^2)^2 = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4,$$

aequatione ipsius z valor quam proxime est

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2}-5)a^2}{48k}$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k} \quad \text{et} \quad PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}.$$

ergo latissima est supra medietatem ibique latior est quam altitudo AC .

COROLLARIUM 3

2. Si igitur linea recta vel curva hanc curvam AMC in M tangat, tota extera spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius et descendendo super chorda AM quam super quavis alia recta ex A in lineam ducta.

EXEMPLUM 2

3. Sit m numerus affirmativus et resistentia valde parva; erit k as vehementer magna atque hinc

$$\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}.$$

ea erit

$$x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} \quad \text{atque} \quad t = 2\sqrt{c} = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$$

prodit

$$v = gx - \frac{ng^m x^{m+1}}{(m+1)k^m} \quad \text{et} \quad \sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$$

$$v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}} x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}.$$

tem valoribus substitutis prodit ista aequatio

$$\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2 g^{m-1} x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3 g^2}{(2m+1)(2m+2)k^m}.$$

Quia vero est $n = \frac{z}{x}$, habebitur ista aequatio

$$Vgcx = z + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^2}{(2m+1)(2m+2)h^m} - \frac{g^{2m}}{(2m+1)(2m+2)h^m}$$

seu

$$gcx = z^2 + \frac{g^{m-1}x^{m-1}z^3}{(m+1)(2m+1)h^m},$$

si medium est rarissimum. Unde patet, si resistentia $z^2 = gcx$ seu curvam AMC circum diametri AC .

SCHOLIUM

504. Si igitur cognita fuerit curva AMC et determinari poterit recta AM , super qua corpus ex lineam pertingat. Scilicet construenda est curva AA tangat v. g. in M ; eritque recta AM ea recta, super ex A citissime ad lineam datam perveniat. Atque dante problemate, si recta vel curva tangat curvam AMC corpus ex A descendendo per AM usque ad lineam maiorem acquireret celeritatem quam descendendo super AM ad eam lineam ducta. Ex his igitur solvi possunt quiritur recta ex A ad datam lineam ducta, super vel maximam acquirat celeritatem vel citissime ad eam perveniat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immoremur super lineis rectis considerandum progrediemur.

PROPOSITIO 58

PROBLEMA

505. *In hypothesi gravitatis uniformis g et mediiformi determinare motum corporis data cum celeritate in ascendente super linea recta AB utcumque inclinata ad horizontem.*

SOLUTIO

Ducta horizontali AC et ex M ad eam per $PM = x$ sitque $AM = nx$. Sit altitudo debita cel

do debita celeritati in M est v ; resistantia vero in M sit $= \frac{V}{K}$. His
erit

$$dv = -gdx - \frac{nVdx}{K}$$

unde habetur

$$dx = \frac{-Kdv}{gK + nV} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{-Kdv}{gK + nV}$$

Integrali ita accepto, ut evanescat posito $v = b$. Si
ponatur $v = 0$, prodibit $x = BC$, ubi in puncto B
communem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus
ascendit, est

$$t = \int \frac{-nKdv}{(gK + nV)V}$$

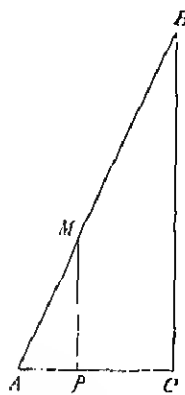


Fig. 62.

Integrali quoque ita accepto, ut evanescat posito $v = b$; in quo si porro
 $v = 0$, prodibit tempus totius ascensus per AMB . Pressio autem,
qua AMB sustinet, ubique est constans et aequalis vi normali

$$= \frac{gV(n^2 - 1)}{n}$$

COROLLARIUM 1

Si linea AMB sit horizontalis, evanescente angulo BAC fiet $n = \infty$.
erit $AM = z = nx$ erit

$$z = \int \frac{-Kdv}{V}$$

s, quo per AM progreditur, erit

$$= \int \frac{-Kdv}{V\sqrt{v}}$$

COROLLARIUM 2

Si resistantia fuerit ut potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit
est $K = k^m$. Hoc ergo casu erit

$$x = \int \frac{-k^m dv}{gk^m + nv^m}$$

atque tempus per AM

$$= \int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^n)\sqrt{v}}$$

COROLLARIUM 3

508. Utraque haec expressio in seriem conver

$$x = \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{2m+1} - v^{m+1})}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2(b^{2m+1} - v^{2m+1})}{(2m+1)g^3 k^{2m}}$$

atque tempus per AM

$$= \frac{2n(\sqrt{b} - \sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}} - v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3 k^{2m}}$$

Quamobrem posito $v = 0$ erit

$$BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 b^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}}$$

atque tempus totius ascensus per AB

$$= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2 b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g^3 k^{2m}}$$

EXEMPLUM 1

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis

$$x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} + n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{k}v}{n} + \frac{2gk}{n^2}$$

Itaque erit tota altitudo BC , ad quam corpus pertinet

$$= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$$

Tempus vero, quo per AM ascendit, est

$$= \int \frac{-n dv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k} + n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}}$$

tempus totius ascensus per AMB erit

$$= 2\sqrt{k}l \frac{g\sqrt{k+n}\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$$

et corpus super linea inclinata AC (Fig. 63) descenderit et celeritate in C visita ascondat in CB usque ad B sitque $AC = N \cdot AD$ et $BC = n \cdot BE$ celeritas in C debita altitudini b , erit (§ 486)

$$AD = -\frac{2\sqrt{b}k}{N} + \frac{2gk}{N^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}},$$

$$AC = -2\sqrt{b}k + \frac{2gk}{N} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}},$$

$$BE = \frac{2\sqrt{b}k}{n} - \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}},$$

$$CB = 2\sqrt{b}k - \frac{2gk}{n} l \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

tempus descensus per AC

$$= 2\sqrt{k}l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - N\sqrt{b}}$$

et tempus ascensus per CB

$$= 2\sqrt{k}l \frac{g\sqrt{k} + n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}.$$

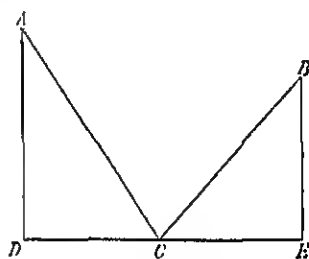


Fig. 63.

descensus et ascensus super lineis rectis inter se comparari possunt.

COROLLARIUM 4

10. Si hi logarithmi per series exprimantur, patet fieri non posse, ut $BE = AD$; est enim in quacunque resistantiae hypothesis, ut ex seriebus (et § 488) intolligitur, $BE < \frac{b}{g}$ et $AD > \frac{b}{g}$. Fieri autem potest, ut $AD = BC$.

COROLLARIUM 5

11. Effici autem facile potest, ut tempus descensus per AC aequale temporis ascensus per CB . Fieri scilicet debet

$$ng\sqrt{k} = Ng\sqrt{k} + Nn\sqrt{b} \text{ seu } n = g\sqrt{b}$$

Est igitur $n > N$ seu $\text{ang. } BCE < \text{ang. } ACD$. Relat
pendet a celeritate in puncto C .

COROLLARIUM 6

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit an
tempus ascensus per BC minus erit tempore desc
hoc generaliter locum habet in quacunque resistanti
tempus descensus per $AC > \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus ascensus
seriebus supra datis (§ 488 et § 508) apparet.

EXEMPLUM 2

513. Resistat medium in duplicata ratione co
Quare habebitur

$$x = \int \frac{-kdv}{gk + nv} = \frac{k}{n} l \frac{gk + nb}{gk + nv}$$

atque (Fig. 62, p. 239)

$$BC = \frac{k}{n} l \frac{gk + nb}{gk} \text{ et } AB = kl \frac{gk}{gk + nb}$$

Tempus vero ascensus per AM erit

$$= \int \frac{-nkdv}{(gk + nv)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} \left(A. \text{ tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}} - A \right)$$

existente radio $= 1$ et A denotante arcum circuli. 16
sus per AB

$$= \frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}} A. \text{ tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}}.$$

Si nunc corpus super linea inclinata AC (Fig. 63, p. 24)
tate in C acquisita, quae debita sit altitudini b , run
fueritque $AC = N \cdot AD$ et $BC = n \cdot BE$, erit

$$AD = \frac{k}{N} l \frac{gk}{gk - Nb} \text{ et } AC = kl \frac{gk}{gk - Nb}$$

pus descensus per AC

$$= \frac{\sqrt{Nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk} + \sqrt{Nb}}{\sqrt{gk} - \sqrt{Nb}}$$

Porro vero erit

$$BE = \frac{k}{n} l \frac{gk + nb}{gk}, \quad BC = kl \frac{gk + nb}{gk}$$

pus ascensus per CB

$$= \frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} A. \text{ tang. } \sqrt{\frac{nb}{gk}}$$

COROLLARIUM 7

4. In hac resistantia hypothesi commodo officii potest, ut sit BC ; dobit enim esse

$$ngk = Ngk + Nnb \quad \text{sen} \quad n = \frac{Ngk}{gk - Nb}$$

tur $n > N$ hincque ang. $BCE < \text{ang. } ACD$.

EXEMPLUM 3

5. Sit resistantia quam minima et proportionalis potestati $2m$ celerit-
erit k quantitas vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit
altitudini b et $AC = N \cdot AD$ atque $BC = n \cdot BE$ corpusque super AC
lat et super CB ascendat, erit

$$AD = \frac{b}{g} + \frac{Nb^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m}$$

pus descensus per AC

$$= \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1)g^2 k^m}$$

Pro ascensu vero erit

$$BE = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m}$$

pus per CB

$$= \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1)g^2 k^m}$$

(§ 508). Si igitur effici debeat, ut sit $AC = BC$, op

$$N + \frac{N^2 b^m}{(m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(m+1)g}$$

unde fit

$$n = N + \frac{2 N^2 b^m}{(m+1)gk^m}$$

propter quantitatem k valde magnam. At quo tem
aequale sit temporis ascensus per CB , debet esso

$$N + \frac{N^2 b^m}{(2m+1)gk^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(2m+1)g}$$

seu

$$n = N + \frac{2 N^2 b^m}{(2m+1)gk^m}$$

SCHOLION 1

516. In casu huius exempli, quo resistantia est v
(Fig. 64) petest determinari huius proprietatis, ut cor

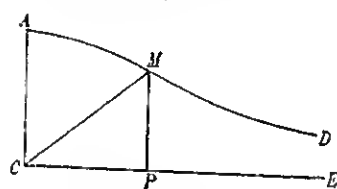


Fig. 64.

tudini b debita ascen

CM ad curvam AMD

$CM = z$ et $MP = x$

$$x = \frac{b}{g} -$$

Quare habebitur ista aequatio

$$b^{m+1}z = (m+1)gbk^m x - (m+1)g^2k$$

Sit $CP = y$ et loco

$$\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$$

scribatur f , orietur

$$fV(x^2 + y^2) = bx - gx^2$$

seu

$$ffyy = (bb - ff)xx - 2gbx^2 + g^2x$$

Si ponatur $y = 0$, erit et $x = 0$ et $x = \frac{b-f}{g} = CA$.
punctum C transit, quae autem eius pars quaesti

sequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur, si n sen $\frac{z}{x}$ ne valde magnam. Aequatio vero dat curvam ellipsiformem maxime in circa axem minorem AC descriptam. Vera autem curva habet AMD , cuius asymptotus est horizontalis CE , si quidem est $m > 1$, aequatio habetur omnibus sumendis terminis, quae erit

$$xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^m(xdx - xdz)}{gk^m x + b^m z}.$$

1. curva non in infinitum progredietur, sed incidet in CE sumendo

$$CE = \frac{bk^m}{(1-m)b^m}.$$

$m < 1$, corpus horizontaliter non in infinitum progredi potest, sed in finita omnem amittit coloritatem.

SCHOLIUM 2

. Si medium resistens non sit uniforme, tum linea non esset recta, tum motus facillime determinari posset; idem quoque est notandum, si sollicitans non fuerit uniformis. Ut sit potentia sollicitans $= P$ et vis $= \frac{V}{Q}$, ubi Q talis est functio exponentis resistentiae variabilis q , V est ipsius v ; his positis motus corporis super quacunque curva ex hac aequatione

$$dv = \pm Pdx \pm \frac{Vds}{Q}.$$

ergo curvae, super qua motus facillime definitur, haec erit aequatio

$$PQdx = Ads,$$

eritur sequens

$$\frac{Adv}{\pm A \pm V} = Pdx$$

super hac curva determinans, in qua indeterminatae sunt a se incomparatae. Quare si etiam huiusmodi hypotheses persequi vollimus, loco rectarum huiusmodi curvas hac aequatione expressas $PQdx = Ads$ habebimus. Sed quia statuimus hypothesin potentiae sollicitantis uniformis tantum fusius pertractare, missis his ad eos casus sumus, in quibus v unicam tantum habet dimensionem, id quod evenit, potentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROBLEMA

518. In hypothesis gravitatis uniformis g et resistivae proportionalis descendat corpus super curva quaecunque determinare eius motum et pressionem, quam curva in

SOLUTIO

In axe verticali sumatur abscissa $AP = x$ et celeritas in M debita altitudini v et exponens resistivae $= \frac{v}{h}$. Quamobrem ista habebitur aequatio motum

$$dv = gdx - \frac{vds}{h}$$

(§ 465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{1}{h} \int v ds}$ et

$$e^{\frac{1}{h} \int v ds} v = \int e^{\frac{1}{h} \int v ds} g dx.$$

Ita autem sumi debet hoc integrale, ut posito $s =$ celeritati initiali in A debitam. Si igitur desconsuetudo $e^{\frac{1}{h} \int v ds} g dx$ ita debet integrari, ut evanescat posito $s =$

$$v = g e^{\frac{1}{h} \int v ds} \int e^{\frac{1}{h} \int v ds} dx.$$

Unde tempus per AM erit

$$= \int \frac{e^{\frac{1}{h} \int v ds} ds}{V g \int e^{\frac{1}{h} \int v ds} dx}.$$

Posito nunc $PM = y$ sumtoque dx constante erit secundum normalem MN sustinet,

$$= \frac{g dy}{ds} + \frac{2 g e^{\frac{1}{h} \int v ds} dx ddy \int e^{\frac{1}{h} \int v ds} dx}{ds^3}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

519. Pressio, quam curva sustinet, in hanc formam potest transmutari

$$\frac{gds}{c^k dy dx} = d. \frac{dy^2}{ds^2} \int c^k dx,$$

postquam pro data curva integratum est $c^k dx$, commodius ad quoscunque accommodatur.

COROLLARIUM 2

520. Corpus in descensu maximam habet celeritatem, ubi est $v = \frac{gk}{ds}$ vero ovonit, ubi est

$$c^k k dx = ds \int c^k dx$$

ubi

$$d. \int c^k dx = \frac{ds}{k};$$

quo puncto patet tangentem non esse horizontalem.

COROLLARIUM 3

521. Si fuerit

$$\int c^k dx = \frac{e^k s^n}{a^{n-1}},$$

$$dx = \frac{n s^{n-1} ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n ds}{a^{n-1} k}$$

0

$$x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n-1}k}.$$

re si haec aequatio exprimat curvae quaesitae naturam, erit

$$v = \frac{g s^n}{a^{n-1}}$$

ampus per AM

$$= \frac{2 a^{\frac{n-1}{2}} s^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\sqrt{g}},$$

quidem n fuerit minor binario; nam si $n=2$ vel $n>2$ curva in A terminatur, et non habebit atque corpus ibi perpetuo

COROLLARIUM 4

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

COROLLARIUM 5

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sunt, corpus in B habebit, debita sit altitudini b praeterea $BM = s$, erit

$$dv = -gdx + \frac{vds}{k},$$

cuius integralis est

$$e^{\frac{v}{k}} v = b - g \int e^{\frac{v}{k}} dx$$

integrali scilicet $\int e^{\frac{v}{k}} dx$ ita accepto, ut evanescat rema erit

$$v = be^{\frac{v}{k}} - ge^{\frac{v}{k}} \int e^{\frac{v}{k}} dx$$

et tempus, quo in descensu arcus MB absolvitur,

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{v}{k}} V(b - g \int e^{\frac{v}{k}} dx)}.$$

COROLLARIUM 6

524. Si igitur detur celeritas in puncto B , nec in curva BMA punctum A , ex quo corpus descendit tatem habuit $= 0$. Quaecri debet scilicet locus, ubi

$$\int e^{\frac{v}{k}} dx = \frac{b}{g}.$$

Atque etiam expressio temporis

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{v}{k}} V(b - g \int e^{\frac{v}{k}} dx)}$$

mpus totius descensus per AMB , si post integrationem ponatur

$$\int e^{\frac{1}{k}} dx = \frac{b}{g}.$$

SCHOLIUM

Duplicem hic motum investigandi modum ideo attulimus, ut tam ascensus ex dato puncto factos quam ad descensus usque ad datum, ut in motu oscillatorio fieri solet, accommodari possit.

PROPOSITIO 60

PROBLEMA

Existente potentia sollicitante uniformi et medio uniformi resistente in ratione celeritatum determinare motum corporis ascendentis super data MD (Fig. 58, p. 220) et pressionem, quam curru sustinet in singulis L .

SOLUTIO

In linea vorticali AP ponatur abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, celeritas bita altitudini b et celeritas in M altitudini v . Sit potentia sollicitans $= g$ et resistentia $= \frac{v}{k}$. His positis erit

$$dv = -gdx - \frac{v ds}{k}$$

quae multiplicata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale

$$e^{\frac{s}{k}} v = b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx$$

et $\int e^{\frac{s}{k}} dx$, ut evanescat posito $x = 0$. Hanc ob rem erit

$$v = e^{-\frac{s}{k}} b - g e^{-\frac{s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$$

mpus ascensus per arcum AM

$$= \int \frac{e^{\frac{s}{k}} ds}{V(b - g \int e^{\frac{s}{k}} dx)}.$$

Ex inventa celeritate habebitur pressio, quam cum
 MX patitur,

$$= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$$

§ 475, posito $PM = y$ et sumto dx pro constan

COROLLARIUM 1

527. Posito ergo $v = 0$ erit

$$g \int e^k dx = b,$$

ex qua aequatione obtinebitur punctum D , quod
 poterit. Atquo tempus totius ascensus per AM
 temporis ponatur

$$g \int e^k dx = b.$$

COROLLARIUM 2

528. Si in formula pressionem exhibente lo
 stituatur, habebitur

$$- \frac{2e^k b dx ddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^k dx}{ds^2}$$

Quae transmutari potest in hanc formam

$$- \frac{2e^k b dx ddy}{ds^3} + \frac{gds}{e^k dy dx} d. \frac{dy}{ds}$$

COROLLARIUM 3

529. Pro descensu vero, si celeritas in A d
 pressio, quam curva in M secundum normalem

$$= - \frac{2e^k b dx ddy}{ds^3} + \frac{ge^k ds}{dy dx} d. \frac{d}{ds}$$

COROLLARIUM 4

Si igitur tam ascensus quam descensus respectu axis AP definiatur, ascensum determinans transmutari potest in aequationem descensus in $-k$ loco k atque vicissim. Quare si super curva AM descensus determinatus, habebitur quoque ascensus et vicissim.

SCHOLIUM

Quia formulae ascensum et descensum determinantes tantam inter se affinitatem, ascensus et descensus facile poterunt inter se comparari adeo oscillationes super data curva determinari. Id quod in sequente Scholione, quantum generaliter fieri potest, praestabimus.

PROPOSITIO 61

PROBLEMA

Sint curvae quaecunque MA et NA (Fig. 65) in infimo puncto A contactae, utque corpus descendat super curva MA et ascendat super curva AN in medio resistente uniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare ascensum super curva MA et ascensum super curva AN .

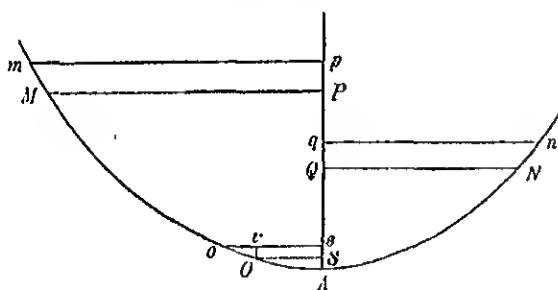


Fig. 65.

SOLUTIO

Celeritas in puncto A debita altitudini b atque in axe verticali AP sit $AP = x$, arcus $AM = s$. Pro curva ascensus AN vero sit $AQ = t$ et $AN = r$. His positis erit corporis descendontis celeritas in M debita

$$e^k b = g e^k \int e^k dx$$

§ 523. Corporis vero ascendentis super curva AM altitudini

$$e^k b = g e^k \int e^k dt$$

§ 526. Quare si celeritates in M et N evanescant una semioscillatione descriptus, erit

$$\frac{b}{g} = \int e^k dx \quad \text{et} \quad \frac{b}{g} = \int e^k dt$$

Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum mAn in puncto A debita sit altitudini $b + db$, erit

$$\frac{b + db}{g} = \int e^k dx + e^k dx$$

hincque

$$e^k dx = \frac{db}{g} \quad \text{seu} \quad e^{\frac{AM}{k}} \cdot Pp$$

Similiter pro ascensu erit

$$e^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq = \frac{db}{g}$$

Ex quibus fiet

$$\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM + AN}{k}} \quad \text{seu} \quad lPp = lQq +$$

Dato ergo arcu MAN una semioscillatione des proximo superiore m descendere incipiat, inven supra N pertinget; erit nempe

$$Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM + AN}{k}}}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM I

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo a descripti, erit semper $Qq < Pp$ eoquo minus er fuerit summa arcuum $AM + AN$. Semper igit quam AP .

COROLLARIUM 2

In vacuo, quia est $k = \infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$; fietque $Qq = Pp$ atque $= AP$. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quantum erat illa, ex qua descendit.

COROLLARIUM 3

Si resistentia fuerit valde parva ideoque k vehementer magnum, erit

$$e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 + \frac{MAN}{k}.$$

in casu erit

$$Qq + \frac{MAN}{k} \cdot Qq = Pp \quad \text{atque} \quad Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}.$$

COROLLARIUM 4

Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam velocitatem, ibique ponatur $AO = s$, $AS = x$, erit

$$gk \frac{dx}{ds} = e^{\frac{s}{k}} b - g e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{x}{k}} dx$$

$$b = g \int e^{\frac{x}{k}} dx + \frac{gk \frac{dx}{ds}}{e^{\frac{s}{k}}}.$$

corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o

$$db = g e^{\frac{-s}{k}} dx + \frac{gk dy}{p},$$

$dy = ov$ et p radio osculi in puncto O , sen

$$\frac{db}{g} = e^{\frac{-AO}{k}} Ss + \frac{k \cdot ov}{p}.$$

hinc aequationis loco ponenda est aequatio

$$b = g \int e^{\frac{x}{k}} dx + \frac{gk \frac{dx}{ds}}{e^{\frac{s}{k}}}.$$

in formulae sequentes corrigendae sunt. P. St.

537. Tempus unius itus per MAN habetur,

$$\int \frac{e^{-s}}{V(b - g \int e^{\frac{1}{2} s} ds)} + \int \frac{e^{\frac{1}{2} s}}{V(b - g \int e^{\frac{1}{2} s} ds)}$$

ponatur

$$\int e^{\frac{1}{2} s} dx = \frac{b}{g} \quad \text{atque} \quad \int e^{\frac{1}{2} s} dt$$

Sicque prodibit tempus unius semioscillationis.

COROLLARIUM 6

538. Ex dictis alia elegans sequitur proprietas. Vb ascendat ad N atque ex N iterum descendat ad A habebit, debita altitudinis, quam tum in A habebit, debita altitudinis $b + db$ debita ascendat pertingatque ad N in A acquirat celeritatem altitudinis $c + dc$ debita

$$\frac{db}{g} = c^{\frac{AN}{k}} \cdot Qq \quad \text{et} \quad \frac{dc}{g} = c^{\frac{-AN}{k}}$$

atque

$$Qq^2 = \frac{db \cdot dc}{g^2}$$

vel etiam

$$\frac{db}{dc} = c^{\frac{2AN}{k}}$$

SCHOLIUM

539. Restat, ut haec generalia ad exemplum applicemus, quo usus eorum eo magis patent. Accipiamus cycloidem tantum, eo quod $\int c^{\frac{1}{2} s} dx$ in ea facile quoque inter s et x sit algebraica. Investigabimus in cycloide factos quam oscillationes, quo appareat, eodem tempore absolvi sunt demonstratae [§ 191].

PROPOSITIO 62

PROBLEMA

Sit curva data cyclois ACB (Fig. 66) super basi horizontali AB pro-circuli diametri CD descripta corpusque super ea ex A descendat in-sistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis
lis.

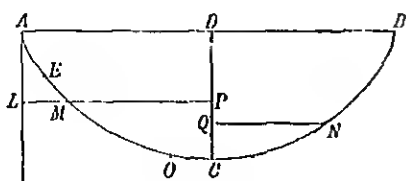


Fig. 66.

SOLUTIO

ita $2(CD) = a$, $AL = x$ et $AM = s$ erit ex natura cycloidis

$$s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)} \quad \text{sen} \quad 2ax = 2as - ss,$$

voro in M debita sit altitudini v ; erit

$$v = g e^{\frac{1}{2}} \int e^{\frac{1}{2}} dx.$$

com est

$$dx = ds - \frac{s ds}{a},$$

$$e^{\frac{1}{2}} dx = k e^{\frac{1}{2}} + \frac{k^2 e^{\frac{1}{2}}}{a} - \frac{k e^{\frac{1}{2}} s}{a} - k - \frac{k^2}{a} = e^{\frac{1}{2}} \frac{ak + k^2}{a} - \frac{ks}{a} - \frac{ak + k^2}{a}.$$

ore substituto erit

$$v = \frac{gak + gk^2 - gks}{a} - \frac{g e^{\frac{1}{2}} (ak + k^2)}{a}.$$

corporis erit celeritas, ubi est

$$v = \frac{gk dx}{ds} = \frac{gak - gks}{a};$$

hoc igitur accidit, ubi est

$$e^k k = a + k \quad \text{sen} \quad s = k l \frac{a + k}{k}$$

Inveniri etiam potest punctum N , in quo corpus c
faciendo $c = 0$ seu

$$e^k = \frac{a + k}{a + k - s} \quad \text{seu} \quad s = k l \frac{a}{a + k}$$

ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN .
descensu absolutar, est

$$= \int \frac{ds \sqrt{a}}{\sqrt{gk(a + k - s - e^k(a + k))}}$$

Deinde ad pressionem inveniendam est

$$\frac{dy}{ds} = \frac{V(2as - ss)}{a} = \frac{V2ax}{a},$$

unde pressio ipsa in puncto M prodit

$$= \frac{gV2ax}{a} + \frac{2gak}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2gks}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2ga}{e^k}$$

Determinavimus ergo celeritatem et tempus et pressio
poris innotescit. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

541. Quia est

$$e^k = 1 + \frac{s}{1 \cdot k} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 k^2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 k^3} + \dots$$

si ponatur $a + k = c$ seu $a = c - k$, erit

$$\frac{(c - k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1 \cdot k} - \frac{cs^2}{1 \cdot 2 k^2} + \frac{cs^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 k^3} - \text{etc.} = \frac{as}{1 \cdot k}$$

Quare erit

$$v = \frac{gs}{a} \left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1 \cdot 2} - \frac{as}{1 \cdot 2 k} + \frac{(a + k)s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 k^2} - \frac{(a - k)s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 k^3} + \dots \right)$$

COROLLARIUM 2

In vacuo igitur, ubi k est infinitum, erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} = g.c.,$$

at. At si resistentia tantum sit valde parva et propterea k valde
erit

$$v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}.$$

COROLLARIUM 3

In vacuo apparet celeritatem corporis esse nullam in duobus punctis,
 $s = 0$ et $s = 2a$, i. e. in duobus conspidibus A et B . In medio vero
alter locus est $s = 0$; alter vero ex hac aequatione erui debet

$$a = \frac{cs}{1 \cdot 2k} - \frac{cs^2}{1 \cdot 2 \cdot 3k^2} + \frac{cs^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^3} - \text{etc.},$$

conitur

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{10a^3k}{9c^3} + \frac{136a^4k}{135c^4} + \text{etc.}^1)$$

k fuerit valde magnum, erit

$$s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 4

Eadem haec series inventa substituto $a+k$ loco c transformatur

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{4a^3}{9k^2} - \frac{44a^4}{135k^3} + \text{etc.}^2),$$

valor ipsius s dat arcum ACN , quo usque corpus motu suo perve-
est.

Editio princeps:

$$s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{10a^3k}{9c^3} + \frac{106a^4k}{135c^4} + \text{etc.}$$

Correxit P. St.

Editio princeps:

$$s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} + \frac{119a^4}{135k^3} + \text{etc.}$$

Correxit P. St.

545. Arcus AO ab A usque ad O , ubi
tunc, est

$$k l^{\frac{a}{k} + k} = a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2}$$

Quare erit arcus

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{a^3}{9k^2}$$

$$OI = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3}$$

et

$$AO + ON = \frac{a^2}{3k} - \frac{a^3}{9k^2}$$

COROLLARIUM

546. Celeritas vero in puncto G reperita

$$gk^2 = g e^{\frac{a}{k}} (ak + 1k) = g \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1 \cdot 3k} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} \right)$$

Unde perspicitur celeritatem in G nunquam
altitudo huic celeritati debita est.

$$= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}} a} \left(e^{\frac{a}{k}} - 1 + \frac{a}{k} \right)$$

atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper minus est quam $1 + \frac{a}{k}$; ex

Quare altitudo debita celeritati in G mai-
or est quam AG .

1) Editio princeps:

$$ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{a^3}{9k^2}$$

2) Editio princeps:

$$= AO + ON = \frac{a^2}{3k} - \frac{a^3}{9k^2}$$

COROLLARIUM 7

547. Altitudo debita celeritati maximae in O est

$$= gk - \frac{gk^2}{a} \frac{a+k}{k} = g \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \frac{a^4}{5k^3} + \text{etc.} \right).$$

quare excessus huius altitudinis supra altitudinem celeritati in O debitam

$$= g \left(\frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} - \frac{5a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5k^3} + \frac{23a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6k^4} - \text{etc.} \right) = g e^{\frac{a}{k}} \left(\frac{a^3}{8k^3} - \frac{a^4}{24k^3} + \text{etc.} \right)$$

haec nempe expressio obtinetur, si in generali valore ipsius v substitua-
 $\frac{a+k}{k}$ loco s , quippe cui quantitati arcus AO est aequalis.

SCHOLION

548. In solutione huius propositionis considerandum venit, quod ex
 formula descensum tantum determinante etiam ascensum corporis super a
 N derivavimus; ex quo dubium oriri potest, an isto ascensus legitime
 definitus. Hoc autem ex ipsa formula ascensum determinante facile per-
 tur. Usi enim fuimus formula hac

$$dv = gdx - Rds,$$

huic puncto M ultra punctum C cadente propter dx factum negativum
 hanc

$$dv = -gdx - Rds,$$

huic revera naturam ascensus continet. Ex his intelligitur continuas in
 ascensum et descensum, qua nullo interiecto saltu inter se cohaerent.
 cum curva se sursum flectere incipit, ibi simul formula descensui inserv.
 transmutatur sponte in formulam ascensus. Atque haec connexio locum ha-
 a medio quocumque resistente, uti ex generalibus formulis apparet, q
 tantum signo ipsius dx discrepant. Quamobrem data nequatione pro cu
 quacumque non est necesse, ut inquiratur, super quam parte corpus ase
 at descendatve, sed alterutra formula ad aequationem accommodata ver
 abilit motum super curva proposita. Hoc tantum est tenendum, ut absce
 in axe vorticali capiantur atque ea formula sive ascensus sive descensus
 ibeatur, quo cum motus initio congruat.

PROBLEMA

549. *Sit curva data ACB (Fig. 66, p. 255) cyclois super descripta et deorsum spectans corpusque super ea oscillatione resistente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum*

SOLUTIO

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$ in eaque sumatur et arcus CM vocetur s ; erit ex natura cycloidis

$$s = \sqrt{2ax} \quad \text{et} \quad x = \frac{s^2}{2a} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{sd}{a}$$

Descendat nunc corpus super arcu MC sitque eius celeritas b ; erit altitudo debita celeritati in M

$$= e^2 b - g \int e^2 dx$$

(§ 523). Est vero

$$\int e^2 dx = \int \frac{e^2}{a} s ds = \frac{k^2 - k^2 e^2}{a} - \frac{k e^2}{a} s;$$

quare altitudo debita celeritati in M est

$$= \frac{a^2(ab - gk^2)}{a} + \frac{gk^3}{a} + gks = e^2 b - \frac{g}{a} \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \cdot 3k} + \frac{s^4}{2 \cdot 3 \cdot 4k^2} + \dots \right)$$

Arcus ergo, in quo integer fit descensus, habebitur, si ipsa aequatione quaeratur

$$e^2 = \frac{gk^2 + gks}{gk^2 - ab}$$

Fiet autem hinc in serie

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{11A^3}{72k^2} + \frac{43A^4}{540k^3} + \text{etc.}^1)$$

1) Editio princeps:

$$s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{6A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} + \text{etc.}$$

brevitatis ergo A loco $\sqrt[3]{2ab}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM ,
 idem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam
 habebit in O sumto $CO = s$ ex hac aequatione

$$c^2 = \frac{gk^2}{gk^2 - ab} \quad \text{sen} \quad CO = kl \frac{gk^2}{gk^2 - ab}$$

altitudo huic maximae celeritati debita est

$$= \frac{gk \cdot CO}{a} = \frac{gk^2}{a} l \frac{gk^2}{gk^2 - ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} + \text{etc.}$$

tempus determinandum convonit ad punctum O celeritatemque maximam
 ere et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem cole-
 in O debitam $= c$ et arcum $MO = q$; erit

$$CO = \frac{ac}{gk} \quad \text{et} \quad ab = gk^2(1 - e^{\frac{-ac}{gk}}), \quad s = \frac{ac}{gk} + q.$$

substitutis erit altitudo debita celeritati in M , seu v ,

$$= \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{gk}} gk^2}{a}.$$

nunc v minor est quam c , pono $c - v = z$ eritque

$$az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{gk}} gk^2$$

in serie

$$\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} + \text{etc.}$$

ma convertendo fit

$$q = \frac{\sqrt[3]{2az}}{\sqrt[3]{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt[3]{2az}}{18gk^2\sqrt[3]{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^3\sqrt[3]{2az}}{1080g^3k^4\sqrt[3]{g}} - \text{etc.}$$

at descensus in puncto M ; erit ibi $v = 0$ et $z = c$ ideoque

$$OM = \frac{\sqrt[3]{2ac}}{\sqrt[3]{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt[3]{2ac}}{18gk^2\sqrt[3]{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^3\sqrt[3]{2ac}}{1080g^3k^4\sqrt[3]{g}} - \text{etc.}$$

quia perinde est, sive g ponatur negativum sive
fuerit punctum, quousque corpus ascendit,

$$= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^3}{108g^3k^4} + \text{etc.}$$

Tempus vero per MO hoc modo invenitur: quia est

$$ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \text{etc.}$$

hoc divisum per $Vv = V(c - z)$ dat elementum temp

$$= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g(cz - z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c - z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^3\sqrt{g(cz - z^2)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g(cz - z^2)}} + \text{etc.}$$

Quod ita integrari debet, ut posito $v = c$ vel $z = 0$
uatur $z = c$, habebitur tempus, quo corpus per arcum
igitur tempus, posita peripheriae ad diametrum radi

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{16a^2c}{405g^2k^3} + \text{etc.}$$

Posito igitur k negativo erit tempus, quo corpus ex

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{16a^2c}{405g^2k^3} + \text{etc.}$$

Tempus ergo per MCN seu tempus unius dimidia

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

1) Editio princeps: $\frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ (loco $\frac{16a^2c\sqrt{c}}{405g^2k^3}$). Corroxi

COROLLARIUM 1

Si ergo celeritas maxima corporis descendens fuerit debita altitudi-
propter

$$CO = \frac{ac}{gk}$$

$$MC = \sqrt[2]{\frac{ac}{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt[2]{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt[2]{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$$

pro ascensus CN erit.

$$N - CO = \sqrt[2]{\frac{ac}{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt[2]{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt[2]{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

$$CM - CN = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3} - \text{etc.}$$

$$MCN = \frac{2\sqrt[2]{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt[2]{2ac}}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt[2]{2ac}}{540g^2k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 2

Si totus arcus descensus MC ponatur = E et sequens arcus ascen-
= P atque altitudo debita celeritati in C = b, erit

$$b = k^2 - \frac{E^2}{2k} (k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} - \text{etc.}$$

si k negativo eodem modo invenitur

$$\frac{ab}{g} = \frac{E^2}{2} + \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} + \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4} + \text{etc.}$$

si fit

$$P = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{44E^4}{135k^3} + \frac{104E^5}{405k^4} - \text{etc.}^1)$$

fit debita celeritati maximae

$$c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} - \text{etc.}$$

initio principis:

$$P = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4} + \text{etc.}$$

Correxit P. St.

552. quia F est arcus ascensus in prima dimidia
arcus F arcus descensus in sequente oscillatione; cum
arcus ascensus

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{328E^4}{135k^3} + \frac{1376E^5}{405k^4}$$

Atque simili modo sequentes oscillationes, quotquot lib

COROLLARIUM 4

553. Ex aequatione tempus exponente apparet, tot
 M ad O pervenit, semper minus esse tempore, quo con
peringit. Simili modo etiam arcus ON maior est qu
vero CN minor est arcu MC .

COROLLARIUM 5

554. Si oscillationes fuerint infinite parvae seu c
congruent oscillationes cum oscillationibus in vacuo fac
expressionibus iidem termini evanescent, qui evanesco
Minimis ergo oscillationibus isochronae erunt oscillati
dinis a in vacuo sollicitati a potentia g seu penduli i
 $= 1$, cuius longitudo est $= \frac{a}{g}$.

COROLLARIUM 6

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora osci
maiores; quare in hac resistentiae hypothese cyclois tant
non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fu
maior quoque erit excessus temporis oscillationis hui
oscillationis minimae.

1) Editio princeps:

$$G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^5}{405k^4} - \text{etc}$$

SCHOLIUM 1

3. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo re, locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si esset infinite magnum seu k infinite parvum, sequentes termini tempus

$$\frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac \sqrt{2a}}{12gk^2 \sqrt{g}} + \text{etc.}$$

minuerent, etiam si c esset infinito parvum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curva quacunque in vacuo et medio resistente intercurrent, quando neque radius osculi curvae in infimo puncto fuerit insignis neque resistentia infinito magna.

EXEMPLUM

4. Exempli loco evolvamur casum, quo resistentia tam fit exigua, ut k quantitas tam magna, ut fractiones, in quarum denominatoribus k quibus habet dimensiones, tuto pro nihilo haberi possint. Dicta igitur celeritati maximae in O debita c , ita ut sit $CO = \frac{ac}{gk}$, erit arcus

$$MC = R = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac \sqrt{2ac}}{18gk^2 \sqrt{g}}$$

et arcus ascensus

$$CN = R' = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac \sqrt{2ac}}{18gk^2 \sqrt{g}}$$

venitur

$$\sqrt{c} = \frac{R \sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{R^2 \sqrt{g}}{3k \sqrt{2a}} + \frac{7R^3 \sqrt{g}}{36k^2 \sqrt{2a}}$$

$$c = \frac{gR^2}{2a} - \frac{gR^3}{3ak} + \frac{gR^4}{4ak^2}$$

$$R' = R - \frac{2R^2}{3k} + \frac{4R^3}{9k^2}$$

ergo dimidiae oscillationis per MN est

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi R^2 \sqrt{2a}}{24k^2 \sqrt{g}}$$

In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus

$$= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2},$$

quem sequetur arcus ascensus

$$= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2},$$

atque tempus huius dimidia oscillationis erit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}},$$

ubi ultimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatoris potestate
oscillatione est arcus descensus

$$= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$$

et arcus descensus

$$= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}.$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur
descensus

$$= E - \frac{2(n-1)E^2}{3k} + \frac{4(n-1)E^3}{9k^2},$$

et arcus ascensus

$$= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infimo

$$E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2},$$

qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis

$$\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}.$$

Tempus autem semioscillationis numero n indicatae

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2 \sqrt{2a}}{24k^2 \sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3 \sqrt{2a}}{18k^3 \sqrt{g}}$$

tus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A , erit

$$A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} \quad \text{et} \quad E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$$

ante sponte termino sequente. Hinc totus arcus oscillatione per unum n indicata descriptus erit

$$E' = \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2 A^3}{9k^2}$$

COROLLARIUM 7

. Si n tant oscillationes dimidia et arcus descensus primae oscillationis E et arcus ascensus ultimae $= L$, erit

$$L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$$

expressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressionem arithmetica eiusdem initii hancque ob rem erit

$$L = \frac{3Ek}{3k + 2nE} \quad \text{scilicet} \quad 3k(E - L) = 2nEL$$

COROLLARIUM 8

Hinc, si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus oscillationis E una cum arcu ascensus ultimae L , inveniri potest semioscillationum; namque est

$$n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$$

COROLLARIUM 9

Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pondere, sed a E datis idem reperitur arcus L , quaecunque fuerit longitudo penduli. Atque est semper n proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes recenset NEUTONUS in *Phil. Lib. II.*, ubi notat arcum descensus ultimae oscillationis atque numerum oscillationum in aqua et mercurio.¹⁾ Quare si haec media perfecte resistunt ratione, congrua esso deberent cum hisce for arcus proportionale esset numero oscillationum et a iunctim. Quod etiam locum habere observavi in m quibus celeritas non est nimis exigua. At in oscillation ratio ab hac regula conspicitur. Ex quo colligitur celeritas in fluido, eo propius resistentium accedens celeritatum, motum autem tardissimum alii resist xium, quae in motibus celerioribus prae resistentia tum est proportionalis, evanescat. In hisce quoq resistentiam partim simplici celeritatum rationi, pa duplicatae proportionalem assumsit neque tamen satisfacit. In ultima vero *Phil.* editione²⁾ ipso NEUT priorem theoriam suam agnoscit atque pluribus illam fluidorum resistentiam esse constantem seu t tionalem, quam antea ipsis celeritatibus proportiona ob rem istam resistentiam cum ea, quae quadra tionalis, in sequente propositione coniunctam consi aequationum resolutio et celeritatum determinatio cillior evadat.

COROLLARIUM 10

562. Quod ad tempora oscillationum et somi spicuum est ea decrescere, quo minores fiant arcus plane evanescant, tempus dimidiaae oscillationis for

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}}.$$

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. De motu et resistentia funependulorum. P. St.

2) Editio tertia, Londini 1726. P. St.

COROLLARIUM 11

563. Excessus autem cuiusque semioscillationis temporis supra temporis minimae semioscillationis in casu resistentiae minimae est.

$$\frac{\pi k^2 \sqrt{2a}}{24k^2 \sqrt{g}}$$

notante k' arcum descensus illius semioscillationis. Quare iste excessus proportionalis est quadrato arcus descensus vel etiam quadrato totius arcus semioscillatione descripti.

SCHOLION 3

564. Cyclois igitur, quae ab HUGENIO apta est demonstrata ad isochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente applicata celeritatum ratione amittit et hanc ob rem in aere non inseri possunt si vel oscillationes sint valde parvae vel inter se proxime aequales. Ex hoc patet, quod maiores oscillationes diutius durent, colligi licet veram curvaturam tautochronam in hac resistentiae hypothesis magis esse curvam quam cycloidem nemadmodum scilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois est terminum infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrone in cycloide continetur, quae eius curvatura a puncto infimo magis decrescet quam curvatura cycloidis.

PROPOSITIO 64

PROBLEMA

565. Si medii resistentia partim fuerit constans, partim quadratis celeritatibus proportionalis, determinare motum oscillatorum corporis super cycloide AM (fig. 66, p. 255), saltem in casu, quo resistentia est valde parva.

SOLUTIO

Sit ut ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2} a$, $CP = x$ arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in P altitudini v . Potentia corpus perpetuo deorsum sollicitans sit $= g$, resistentiae, quae est constans, sit $= h$ et pars resistentiae quadratis celeritatibus

tatum proportionalis sit $= \frac{z}{k}$ ut ante; erit k quant.
 v et s et a atque h valde parvum respectu g . Iam
 MC ; erit

$$dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}$$

atque hinc

$$v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{-\frac{s}{k}} (gdx - hds)$$

At quia est ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$, erit

$$\int e^{-\frac{s}{k}} gdx = \frac{gk^2}{a} - \frac{gk^2 e^{-\frac{s}{k}}}{a} - gke^{-\frac{s}{k}}$$

et

$$\int e^{-\frac{s}{k}} hds = hke^{-\frac{s}{k}} - hke^{-\frac{s}{k}};$$

unde fit

$$v = e^{\frac{s}{k}} (ab + hake - gk^2) - hake + gk^2$$

Celeritas maxima habetur, si fuerit

$$\frac{gs}{a} = h + \frac{v}{k}$$

seu

$$e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - hake}$$

Dicatur altitudo debita celeritati maximae in O =

$$CO = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk}$$

et

$$ab = gk^2 - hake - gk^2 e^{-\frac{hake}{gk^2}}$$

Ponatur arcus $MO = q$; erit

$$s = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk} + q;$$

unde fit

$$v = \frac{ac}{a} + \frac{gk^2}{a} + \frac{gkq}{a} - e^{\frac{q}{k}} gk^2$$

minus est quam c , pono $c - v = z$; erit

$$az + gk^2 + gkq = c^{\frac{7}{2}} gk^2.$$

o in seriem conversa dat ut supra

$$\frac{az}{g} = \frac{q^3}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$$

$$q = \frac{\sqrt{2}az}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2}az}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

us ex M ; erit ibi $v = 0$ et $z = c$ ideoque

$$MO = \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

mula reperitur arcus ascensus

$$ON = \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}};$$

his h non reperiatur, erit ut supra tempus semioscillationis

$$= \frac{\pi\sqrt{2}a}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2}a}{12gk^2\sqrt{g}}.$$

us descensus MC erit

$$= \frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}}$$

scensus

$$CN = -\frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}}.$$

s descensus MC ponatur E et arcus ascensus $CN = F$, erit

$$F = E - \frac{2ha}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4haE}{3gk} + \frac{4E^3}{9k^2}.$$

In sequente semioscillatione est arcus descensus F et

$$G = E - \frac{4ha}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16haE}{3gk} +$$

Atque generaliter in ea semioscillatione, quae incipit ab arcu ascensus est

$$= E - \frac{2nha}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2haE}{3gk} + \frac{4n^2E^3}{9k^2} =$$

Quare si poractis n semioscillationibus dicatur arcus ascensus ultimae L , erit

$$2gnEL = 3gk(E - L) - 6kn$$

seu

$$n = \frac{3gk(E - L)}{2gEL + 6hak}.$$

Tempus vero, quo quaelibet semioscillatio per MC transit

$$= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE - ha)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$$

loco c eius valore substituto. Q. E. l.

COROLLARIUM 1

566. Si ponatur $c = 0$, ut locus prodeat, in quo corpus invenitur

$$MC = \frac{ha}{g};$$

corpus ergo in quiete permanere potest non solum in C , sed quoque in distantia $\frac{ha}{g}$ cis et ultra C . Quare in huiusmodi ex statu quietis penduli non exacte linea verticali sed sub aliquo angulo, cujus sinus est $\frac{h}{g}$, aberrari potest.

SCHOLION 1

567. Huiusmodi resistantiam in aqua locum habet, in quo vincitur, quippe in motibus tardissimis resistantia minima proportionalis observatur; in fluido vero praecipue

eritatum proportionalem aliam non dari probabile est, nisi resistentiam constantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a LA HIRE institutis, monstravit pendulum in aqua extra situm verticalem in quiete stare posse. Quod fieri non posset, si resistentia a sola celeritate dependet. Ex experimentis NEWTONI, quae circa retardationem motus penduli in aqua instituit, concludi potest globi plumbei diametri 2 dig. resistentiam constantem esse circiter partem millionesimam gravitatis seu $\frac{h}{g} = \frac{1}{10000}$ ergo globus filo suspensus a linea verticali aberrare potest angulo circiter 10", qui autem error est insensibilis. Maior autem et sensibilis poterit error, quo minor sinique levior globus adhibeatur.

COROLLARIUM 2

568. Ad hunc angulum inveniendum inservit ista aequatio ex superius [565] deducta

$$\frac{h}{g} = \frac{E - L}{2na} - \frac{EL}{3ak}$$

minui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare potest. At locum hunc parvum accipi convenit, quo termini neglecti eo magis fiant insensibiles.

COROLLARIUM 3

569. Ex aequatione

$$n = \frac{3gk(E - L)}{2gEL + 6hak}$$

parot, quo maior sit arcus oscillatione descriptus, eo minorum fieri totum $6hak$ respectu $2gEL$. Atque hoc in causa est, quod haec resistentia in minimis oscillationibus sentiatur.

COROLLARIUM 4

570. Quia h est numerus tum per hypothesin valde parvus tum in fluidis, ad quae haec propositio est accommodata, roipsa fere ov

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. II sectio II. De motu et resistentia corporum funependulorum, Scholium generale. P. St.

scens, in expressione temporis evanescet quoque *ha* pr
 unius semioscillationis erit

$$= \frac{\pi \sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2 \sqrt{2a}}{24k^2 \sqrt{g}}.$$

Resistentia igitur constans non imminuat tempora osc

SCHOLION 2

571. Etiam si ergo haec resistentia constans cum
 celeritatum proportionali coniuncta consideretur, calculu
 neque difficilior. Nam ex celeritate maxima \sqrt{c} totus arc
 descriptus eodem modo determinatur, sive haec resisten
 non; utroque enim casu plane eadem obtinetur aequati
 hoc ipso sequi videtur hanc resistentiae legem in natu
 vero resistentias praeter hanc et eam, quae quadrati
 portionalis, actu non inveniri. Fluida autem iam
 duplicem resistentiam exercere observata sunt, alteram
 proportionalem, quae in motibus celerioribus sola c
 motibus tardissimis tantum sensibilem. Illa resistent
 particularum fluidi et per eam corpus de motu suo
 culas eas removet; quam quadratis celeritatum propo
 nequit. Haec vero resistentia a tenacitate fluidi ortum
 fluidi inter se cohaerent et difficulter a se invicem s
 corpus per datum spatium movetur, datus particularu
 portionalis a se invicem divelli debet; quare haec r
 potentia absoluta motum corporis retardante, quippe q
 spatia aequalem ictuum numerum in corpus exierit.
 sen vis motui corporis semper est contraria et socum
 motus in corpus agit atque ideo est vis tangentiali
 retardans. At hoc casu natura a calculo exceptio
 corpus quiescit. Quoniam enim haec vis est constan
 in corpus quiescens ac in motum; quiescens autem co
 culas non divellit, hanc vim sentire nequit. Accedit a
 vis directioni motus sit contraria, ea in corpus quiesce
 directionem, nullum effectum habere queat. At si m
 investigatur, tangens curvae semper pro directione m

pus actu quiescat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore crescente ostendit; hoc igitur casu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod parvum spatium circa C in quiete permanere posse ideo est dicendum, quia ovis nisus versus C non sufficit ut particulas fluidi a se invicem separandas. Quare corpus quiescere potest a quolibet puncto illius spatii, etiamsi calculus ostendat etiam in ipso puncto corpus non in quiete perseverare posse.

SCHOLIUM 3

572. Ex his, quae partim generaliter tradidimus, partim de cycloide demonstravimus, perspicitur, quomodo in medio resistente in duplicata ratione celeritatis motus corporis super quacunque curva possit determinari. Consideramus quidem medium resistens uniforme et potentiam sollicitantem quae sit in duplicata ratione velocitatis; sed ex aequatione resolvenda apparebit eam quoque integrari per se quomodocunque tum medium sit difforme tum potentia sollicitans variabilis. Super eum in aequatione altitudo celeritati debita v unicam tantum habet dimensionem. Progredior igitur ad alias media resistentis hypotheses; quae tamen non pro quavis curva motus potest definiti, curvae primo sunt assignandae, quae determinationem motus admittunt. Assumimus hic aequationem institutam nostram eas curvas, quae ad aequationem homogeneam reducuntur, in qua indeterminatae ubique eundem obtinent dimensionum numerum. Si resistentia fuerit potestati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habet aequatio

$$dv = \pm g dx \pm \frac{v^m ds}{k^m};$$

in quo sit homogenea inter v et x , debet esse

$$ds = x^{-m} dx \quad \text{seu} \quad s = a^m x^{1-m} \quad \text{seu} \quad x = a^{m-1} s^{\frac{1}{1-m}}.$$

si x et s datis quantitibus augeantur vel diminuantur, in curva, celeritas est aequatio

$$x = a^{m-1} (s + f)^{\frac{1}{1-m}} = a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}},$$

motus quoque determinari potest. In medio ergo resistente in similitudine celeritatum curva fit cyclois ideoque motum super ea determinare

PROPOSITIO 65

PROBLEMA

573. In medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum, detector oscillatorium corporis super cycloide ACB (Fig. 66, p. 255) existet quam potentia sollicitante uniformi.

SOLUTIO

Sit iterum ut ante diameter circuli generatoris CD $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita altitudinis in M altitudini x . Potentia corpus perpetuo deorsum habet et resistentia $= \frac{v}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus; erit ex natura

$$dv = -gdx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a};$$

erit

$$v = \frac{ku^2}{a^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{2kud u}{a^2},$$

unde fit

$$2kud u = -gsds + auds,$$

quae aequatio ita debet integrari, ut facto $s = 0$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. vero super arcu CN haec habetur aequatio

$$2kud u = -gsds - auds.$$

Ponatur $u = ps$; habebitur pro descensu

$$2kp^2sds + 2kps^3dp = -gsds + apsd s$$

seu

$$\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}.$$

integrando

$$= lC - \frac{1}{2} l \left(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k} \right) + \frac{a}{2 \sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4kp - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}} \\ + \frac{1}{2} l \frac{2a^2v \sqrt{k} - a^2s \sqrt{v} + gas^2 \sqrt{k}}{2ks^2 \sqrt{k}} + \frac{a}{2 \sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4a \sqrt{k}v - as + s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a \sqrt{k}v - as - s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

tata significatione litterae C

$$(2a^2v \sqrt{k} - a^2s \sqrt{v} + gas^2 \sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{4a \sqrt{k}v - as + s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a \sqrt{k}v - as - s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

$s = 0$ et $v = b$; fiet $lC = l2a^2b \sqrt{k}$; hinc fiet

$$\frac{2av \sqrt{k} - as \sqrt{v} + gs^2 \sqrt{k}}{2ab \sqrt{k}} = \left(\frac{4a \sqrt{k}v - as + s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a \sqrt{k}v - as - s \sqrt{(a^2 - 8gak)}} \right)^{\sqrt{\frac{a}{(a^2 - 8gak)}}}$$

in vero curvae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$ habetur aequatio

$$\frac{2av \sqrt{k} + as \sqrt{v} + gs^2 \sqrt{k}}{2ab \sqrt{k}} = \left(\frac{4a \sqrt{k}v + as + s \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a \sqrt{k}v + as - s \sqrt{(a^2 - 8gak)}} \right)^{\sqrt{\frac{a}{(a^2 - 8gak)}}}$$

ad coloritatem maximam, quae sit in O , debita dicatur c , erit

$$CO = \frac{a \sqrt{c}}{g \sqrt{k}}$$

$$c = b \left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}} \right)^{\sqrt{\frac{a}{(a^2 - 8gak)}}}$$

aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$ seu $k < \frac{a}{8g}$.

Si $k > \frac{a}{8g}$, aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul habent.

namus esse $k = \frac{a}{8g}$ eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k \left(p - \frac{a}{4k}\right)^2}$$

PROPOSITIO 65

PROBLEMA

573. *In medio, quod resistit in simplici ratione celeritatum
oscillatorium corporis super cycloide ACB (Fig. 66, p. 255)
quam potentia sollicitante uniformi.*

SOLUTIO

Sit iterum ut ante diameter circuli generatoris
 $CP = x$ et arcus $CM = s$. Ponatur celeritas in C debita
celeritas in M altitudini v . Potentia corpus perpetuo deorsum
et resistentia $= \frac{V^r}{V^k}$. Fiat super parte AMC descensus; erit

$$dv = -gdx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a};$$

erit

$$v = \frac{ku^2}{a^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{2kudu}{a^2},$$

unde fit

$$2kudu = -gsds + auds,$$

quae aequatio ita debet integrari, ut facto $s = 0$ fiat $u = 0$
vero super arcu CN haec habetur aequatio

$$2kudu = -gsds - auds.$$

Ponatur $u = ps$; habebitur pro descensu

$$2kp^2sds + 2kps^2dp = -gsds + apsd$$

sen

$$\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}.$$

integrando

$$= lC = \frac{1}{2} l \left(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k} \right) + \frac{a}{2\sqrt{a^2 - 8gak}} l \left(4kp - a + \sqrt{a^2 - 8gak} \right) \\ + \frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{a^2 - 8gak}} l \left(4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{a^2 - 8gak} \right) \\ - \frac{a}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}$$

data significatione litterae C

$$2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}} l \left(4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{a^2 - 8gak} \right) \\ - \frac{a}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}$$

$s = 0$ et $v = b$; fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet

$$\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{a^2 - 8gak}} \right)^{\frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}}$$

vero curvae parte CN pro ascensu corporisposito $CN = s$ habetur autem

$$\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{a^2 - 8gak}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{a^2 - 8gak}} \right)^{\frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}}$$

de coloritati maximae, quae sit in O , debita dicatur c , erit

$$CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$$

$$c = b \left(\frac{4gk - a + \sqrt{a^2 - 8gak}}{4gk - a - \sqrt{a^2 - 8gak}} \right)^{\frac{a}{\sqrt{a^2 - 8gak}}}$$

autem aequationes locum non habent, nisi sit $a^2 > 8gak$ seu $k < \frac{a}{8g}$.
 $k > \frac{a}{8g}$, aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul
 t.

amms esse $k = \frac{a}{8g}$ eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-pdp}{\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2} = \frac{-dp}{p - \frac{a}{4k}} - \frac{adp}{4k\left(p - \frac{a}{4k}\right)^2}$$

Integrando ergo prodibit

$$ls = lC - l\left(p - \frac{a}{4k}\right) + \frac{a}{4kp-a} = lC - l\left(\frac{a\sqrt[4]{v}}{s\sqrt[4]{k}} - \frac{a}{4k}\right) -$$

[sou mutata significatione litterae C]

$$= lC - l(4a\sqrt[4]{kv} - as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt[4]{kv} - as}$$

Fit igitur $lC = l4a\sqrt[4]{kb}$; unde habebitur

$$l \frac{4\sqrt[4]{kv} - s}{4\sqrt[4]{kb}} = \frac{s}{4\sqrt[4]{kv} - s}$$

Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $4\sqrt[4]{kv}$ maius esse debet quam s . Hoc ergo casu, si celeritas realis, descensus initium fit imaginarium. Quare ubicumque inceperit, celeritas in puncto infimo C erit $= 0$. Ad intelligendum, si descensus fit ex puncto dato E fueritque CE

$$lC = l - af + 1$$

ideoque

$$l \frac{s - 4\sqrt[4]{kv}}{f} = \frac{4\sqrt[4]{kv}}{4\sqrt[4]{kv} - s}$$

Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt[4]{kv} < s$, quando ubi $s = 0$, debet quoque esse $v = 0$. Maxima celeritas, quam ponendo

$$\sqrt[4]{v} = \frac{gs\sqrt[4]{k}}{a} \quad \text{seu} \quad s = 8\sqrt[4]{kv},$$

quo posito prodit

$$l \frac{s}{2f} = -1 \quad \text{seu} \quad s = \frac{2f}{e} = CO$$

denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His igitur arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si CE celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, manifestum exprimetur

$$l \frac{4\sqrt[4]{kv} + s}{4\sqrt[4]{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt[4]{kv} + s},$$

ex qua patet esse

$$s + 4\sqrt[4]{kv} < 4\sqrt[4]{kb} \quad \text{et} \quad \sqrt[4]{v} < \sqrt[4]{b} - \frac{s}{4\sqrt[4]{k}}.$$

est. $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractavimus, resistantia adhuc fit maior, et multo magis celeritas in C orit $= 0$, si quidem descensus ex dato fiat, atque pro data celeritate in C initium descensus erit inane. Quamobrem aequatio, quam pro descensu dedimus, est imaginaria, donec determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE = f$;

$$lC = lga f^2 \sqrt{k} - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$$

$s = 0$ erit

$$l \frac{gf^2}{2av} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)^2}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)^2}},$$

esset $= 0$; nam si v ost $= 0$, haec aequatio non valet. Apparet hanc aequationem contradictionem continere, quia $2av$ maius esse quam gf^2 seu $2v > \frac{gf^2}{a}$ posito s pro f . At est $\frac{gs}{a} = 2x$ atque ita esset quod ost absurdum; nam in vacuo est tantum $v = gx$ atque in medio adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inservit aequatio inque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v = 0$, quod odit.

$$\frac{gs^2}{2ab} = \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}} \right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}} = \frac{g \cdot CQ}{b}.$$

is igitur prospicitur, si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$, oscillationes peragi non possunt, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis in reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt investigandi; quia enim in omni casu ost minor atque quantumvis parva assumi potest, oscillationes perfici poterunt. Factis ergo superioribus substitutionibus habemus

$$\frac{ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}},$$

integratio princeps: factoque $s = 0$ erit $l \frac{gf^2}{av} = - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}} l \frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}$. Quamobrem etiam sequentes corrigendae erant; nihilominus EULERI conclusio valet. P. St.

quae aequatio posito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc

$$\frac{-ds}{s} = \frac{q dq + \frac{a dq}{4k}}{q q + \frac{q a}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}.$$

Ponatur

$$\frac{q a}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2,$$

quia est quantitas affirmativa, eritque

$$lC - ls = lV(q^2 + B^2) + \frac{a}{4k} \int \frac{dq}{q^2 + B^2} = lV(q^2 + B^2)$$

ubi $At. \frac{q}{B}$ est arcus circuli, cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existens substituto autem pro q valore debito erit [mutata significat

$$lC = lV(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}) + \frac{a}{4Bk} At. \frac{4a\sqrt{k}}{4a\sqrt{k}}$$

Ponatur ad lC definiendum $s = 0$ et $v = b$; erit

$$lC = lV2ab\sqrt{k} + \frac{a}{4Bk} At. \infty,$$

quare erit

$$l \frac{V2ab\sqrt{k}}{V(2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} = - \frac{a}{4Bk} At. \frac{4a\sqrt{k}}{4a\sqrt{k}}$$

Pro ascensu vero per arcum CN invenitur

$$l \frac{V2ab\sqrt{k}}{V(2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k})} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{4a\sqrt{k}}$$

Posito nunc $v = 0$ prodit integer arcus descensus MC et

$$l \sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{a} = l \sqrt{\frac{b}{g \cdot CP}}.$$

Atque totus arcus ascensus CN invenietur ex hac aequa-

$$l \sqrt{\frac{2ab}{gss}} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{4Bk}{a} = l \sqrt{\frac{b}{g \cdot CQ}}.$$

Ex his aequationibus quanquam videantur arcus ascensus et descensus aequales, tamen sunt inaequales; dantur enim infiniti arcus, quorum unusquisque est eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro ascensu alius accipi debet, alius pro descensu. Atque cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum compositioni accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine sumtis, succedunt successive omnes arcus tam ascensus quam descensus, quamdiu compositio peragitur; nam quia aequatio inventa est generalis, ea omnia comprehendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas unquam est. Erit in hac resistantiae hypothesis hoc habetur commodum, quod statim in quolibet oscillatione, centesima v. gr., arcus tam descensus quam ascensus sit definiiri. Sit arcus D , cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione a ad peripheriam $1:\pi$ erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum

$$D, \pi + D, 2\pi + D, 3\pi + D \text{ etc.}$$

arcus descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D ori-

$$\frac{2ab}{gss} = e^{\frac{pa}{2nk}}$$

abscissa arcus MC

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-pa}{2nk}}$$

abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae oscillationis erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi + D)}{2nk}}$$

et simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(3\pi + D)}{2nk}}$$

et sic generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione, quae indicatur numero n , est

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi + D)}{2nk}}$$

et simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione, quae indicatur numero n , ad ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reservamus. E. I.

COROLLARIUM 1

574. Nisi ergo fuerit $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes absolvi finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vero At si $k > \frac{a}{8g}$, oscillationes perpetuo durabunt, quia

$$\frac{b}{g} e^{-\frac{a(n\pi + D)}{2Bk}}$$

neque evanescere neque negativa fieri potest.

COROLLARIUM 2

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ratione; est enim abscissarum ratio

$$\frac{b}{g} e^{-\frac{Dn}{2Bk}} \quad \text{ad} \quad \frac{b}{g} e^{-\frac{n(\pi + D)}{2Bk}}$$

ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{-\frac{\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pondo

COROLLARIUM 3

576. Atque simili modo arcus descensus primae arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae da est enim haec ratio ut $e^{-\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus duplo fit maior, haec ratio fit duplicata.

COROLLARIUM 4

577. Arcus descensus quotcumque semioscillationum constituunt progressionem geometricam decrecentem in ratione ideo integri etiam arcus semioscillationibus descripti eadem geometrica eiusdem denominatoris.

SCHOLION 1

Quia autem pro D infiniti arcus accipi possunt, quo appareat, quilibet pro arcu descensus accipi debeat, sumo casum, quo $k = \frac{a}{8g}$ ascensus $= \frac{4\sqrt{k}b}{e}$ seu eius abscissa

$$= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g} e^{-2};$$

casu est $B = 0$ atque abscissa arcus ascensus

$$= \frac{b}{g} e^{-\frac{a(\pi + D)}{2Bk}}.$$

esse

$$\frac{a(\pi + D)}{2Bk} = 2 \quad \text{et} \quad \pi + D = \frac{4Bk}{a} = 0,$$

$\frac{Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ sit $= 0$, debet $\pi + D$ esse quo intelligitur $\pi + D$ esse minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ respondens B ; erit π . Quocirca in prima semioscillatione erit abscissa arcus descensus

$$= \frac{b}{g} e^{\frac{a(\pi - k)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$$

seu arcus MC

$$= e^{\frac{a(\pi - k)}{4Bk}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

$\frac{Bk}{a}$ seu tangens arcus $B = \tau$; erit arcus descensus primae semioscillationis

$$= e^{\frac{\pi - k}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

seu arcus descensus secundae semioscillationis

$$= e^{\frac{-k}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

seu descensus in semioscillatione, quae indicatur numero $n + 1$, erit

$$= e^{\frac{-k - (n+1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}},$$

gressione geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constituunt, est eadem. Arcus ascensionis geometricae ergo, quam hi arcus ascensus constituent, est eadem.

COROLLARIUM 5

579. Ex his etiam in qualibet semioscillatione celeritas in C potest definiri. Sit enim in semioscillatione, quae numero a debita altitudini β ; orit arcus ascensus

$$= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2a\beta}{g}},$$

qui aequalis esse debet ipsi

$$e^{\frac{-E - (a-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

Hinc fit

$$\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(a-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}.$$

Celeritates ergo in puncto C in semioscillationibus successivis geometricam quoque constituent, cuius denominator est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

COROLLARIUM 6

580. Si n ponatur numerus negativus, semioscillationes, eae man factae esse possent, cognoscuntur; ut in semioscillatione cedente arcus descensus esse debeat

$$= e^{\frac{2\pi - E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

COROLLARIUM 7

581. Si in prima semioscillatione descensus fiat ex puncto supremo A , orit arcus descensus $= a$. Quare est

$$\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi - E}{\tau}}$$

et celeritas in puncto infimo C seu \sqrt{b} erit

$$e^{\frac{E - \pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}.$$

COROLLARIUM 8

582. Si resistantia fore evanescat seu k fuerit quantitas vehemens, erit

$$B = \sqrt{\frac{ga}{2k}} \quad \text{et} \quad r = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}.$$

Si igitur sit τ valde magnum, erit $k = \frac{\pi}{2}$ atque arcus descensus prioris oscillationis

$$= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = \left(1 + \frac{\pi}{2\tau}\right) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$$

arcus ascensus

$$= \left(1 - \frac{\pi}{2\tau}\right) \sqrt{\frac{2ab}{g}}.$$

SCHOLIUM 2

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, quod cum inspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducere, nam in casu $k < \frac{a}{8g}$ aequationes, quas pro descensu et ascensu invenimus, sunt comparatae, ut ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem arcui descensus; nam facto $v = 0$ ex utraque aequatione prodit

$$\frac{gs^3}{2ab} = \frac{(a - \sqrt{a^2 - 8gak})^{\sqrt{a^2 - 8gak}}}{(a + \sqrt{a^2 - 8gak})^{\sqrt{a^2 - 8gak}}}.$$

Quod hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret $b = 0$. Posito autem $b = 0$ nullus datur ascensus et aequatio pro descensu proinde immutanda. Quare nisi ex casu, quo $k = \frac{a}{8g}$, advertissemus b esse 0, non posset faciliter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit, si eadem hypothesis $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritatem puncto C investigavimus; posito enim $s = 0$ aequatio ad absurdum deducitur, quoniam enim est comparata illa aequatio, ut facto $s = 0$ non ostendat esse quod $v = 0$, etiamsi rovera sit $v = 0$; ii enim tantum termini sunt neglecti, quibus reperiebatur s , cum reliqui v continentes eodem iure negligi debent. Inveniri ergo non potest esse $v = 0$, si $s = 0$; sed quia ex aequatione absurdum sequitur, nisi esset $v = 0$, ex hoc concludi potest esse $v = 0$. In aliis vero casibus, in quibus absurdum non tam facile perspicitur, faciliter lapsus evitari poterit.

PROPOSITIO 66

THEOREMA

581. *In medio uniformi, quod resistit in simplici c
descensus super cycloide AMC (Fig. 66, p. 255) fiunt ac
similiter etiam omnes ascensus super cycloide UNB aeq
vantur, si quidem potentia sollicitans fuerit uniformis et*

DEMONSTRATIO

Pro descensu, si dicatur arcus $CM = s$ et altit
 $M = v$. habetur ista aequatio

$$dv = -\frac{gs ds}{u} + \frac{ds \sqrt{r}}{\sqrt{k}}.$$

Ponatur $\sqrt{v} = u$; erit u ut ipsa celeritas in M atque
ista aequatio

$$2u du = -\frac{gs ds}{u} + \frac{u ds}{\sqrt{k}},$$

in qua u et s ubique eundem tenent dimensionum n
natur initium descensus in B et arcus $UB = f$ et in
sita, ita ut fiat $u = 0$ posito $s = f$, prodibit aequatio
et s ubique eundem dimensionum numerum const
aequabitur u functioni unius dimensionis ipsarum f
tum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsar
 ds . Eius ergo integrale ita acceptum, ut evanescat
quoque nullius dimensionis ipsarum f et s et exhib
 CM . In hac igitur functione si ponatur $s = f$, ov
functione aequabiturque tempus totius descensus po
titatibus constantibus g , a et k tantum compositao,
alia quantitas punctum E respiciens ingrodiatur.
scensus per EC eadem exprimetur quantitate, ubicunq
atque ideo omnes descensus aequalibus absolventur t
tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco \sqrt{k} ,
in arcu CNB , quod propterea quoque erit consta
arcus ascensu percursus. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

585. Quia u aequalis est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s , aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s . Quare si ponatur $u = nf$, aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f . In vacuum descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum erunt ipsarum f proportionales.

COROLLARIUM 2

586. Cum in descensu maxima celeritas sit, ubi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, invenitur punctum O seu arcus CO ex aequatione, in qua f et s ubique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionales. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

COROLLARIUM 3

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s , tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s seu etiam ipsius f et arcus EM .

COROLLARIUM 4

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se proportionalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

COROLLARIUM 5

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus, etiam omnes semioscillationes aequalibus absolventur temporibus. Quod in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscillationes continuat, omnino verificatur temporibus aequalibus.

COROLLARIUM 6

590. Cyclois ergo, quae est curva tautochronea in vacuo, eandem tautochronitatem retinet in medio, quod resistit in simplici ratione celeritatis ad gravitatem.

Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in est constans seu momentis temporum, ut NEUTONUS (§ 570).

SCHOLIUM 1

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum monstravit in *Princ. Phil.*¹⁾, atque quod ad resistentia proportionalem attinet, ex hoc demonstrationem forn desconsibus, si arcuum partes totis arcibus proportion locis celeritates sint totis arcibus quoque proportion totis arcibus fuerint proportionales, si elementa quoq bus proportionalia, tempora per ea erunt inter se aequ

SCHOLIUM 2

592. Etsi autem ex his appareat tempora tam as sumum inter se esse aequalia, tamen determinari non pot sivo descensuum sive ascensuum, neque etiam tempor suum inter se possunt comparari. Aequatio enim relation ita est complicata, ut ex ea olementum temporis $\frac{ds}{u}$ non possit exprimi. Praeterea oscillationes infinite doterminandis temporibus calculum valde faciliom re stontiae hypothosi nihil adiuvant. Nam etiam si arc natur infinite parvus, in aequatione

$$1 \frac{\sqrt{2ac^2\sqrt{k}}}{V(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})} = \frac{a}{4Bk} At. \frac{ds}{as}$$

quae ex superiori integrata oritur, ne unusquisque ceteris. Pendebit autem tempus ascensus a quantitat modo ex his sit compositum, non liquet. Iuterim quo maior sit g ceteris paribus, eo minus esse tempus quoque crescere, k vero crescente diminui, quia resiste igitur resistentiae hypothosi resistentia in motibus ta

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, sitiones XXV et XXVI. P. St.

modum in resistentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo videtur, si resistentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione in motibus tardissimis resistentiam negligi posse, at si resistentia minore ratione, etiam in motibus tardissimis resistentiam considerare.

PROPOSITIO 67

PROBLEMA

In medio uniformi, quod resistit in ratione multiplicata celeritatum, ponens est $2m$, determinare motum corporis super curva CMA (Fig. 66, in qua arcus quisque CM proportionalis est potestati abscissae CP , cuius est $1 - m$).

SOLUTIO

His abscissa $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit

$$ds = \frac{a^m dx}{x^m}.$$

Velocitas in M debita altitudini v ; erit resistentia in $M = \frac{v^m}{k^m}$ atque ideo, ut descendere ponatur super arcu CM , habebitur ista aequatio

$$dv = -gdx + \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

Idem autem super eadem curva inservit ista aequatio

$$dv = -gdx - \frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}.$$

Utriusque vero aequatio separationem admittet, si ponatur $v = tx$; prodibit utroque descensu

$$xdt = -tdx - gdx + \frac{a^m t^m dx}{k^m}.$$

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) - a^m t^m} = \frac{dx}{x}$$

atque pro ascensu haec aequatio

$$\frac{-k^m dt}{k^m(g+t) + a^m t^m} = \frac{dx}{x}.$$

In quibus aequationibus variables t et x a se invicem per x ope quadraturarum possit determinari. Ceterum definiri debet vel ex data celeritate in puncto in quo vel descensus incipit vel ascensus finitur arcui descensus vel ascensus respondens f , aequationis dimensionis ipsarum f et x tam in descensu quam in ascensu tiones differentiales homogeneas. Hanc ob rem aequationis dimidia dimensionis ipsarum f et x . Tempus quod est

$$= \int \frac{ds}{Vv} = a^m \int \frac{dx}{x^m Vv},$$

aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimensionum ipsarum f et x . Si sit $x=f$ prodit tempus totius descensus ut $f^{\frac{1}{2}}$ est tempus totius ascensus, si quidem f abscissam designat. Si ponatur totus arcus vel descensus vel ascensus A ut f^{1-m} , erit tempus totum vel ascensus vel descensus $A^{\frac{1}{2}}$.

Plurimum ergo descensusum tempora sunt in ratione arcuum descriptorum. Atque in eadem ratione ascensusum inter se; sed tempora ascensusum et descensusum comparantur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

594. Quia celeritas seu Vv aequalis est functioni ipsarum f et x , in pluribus descensibus celeritas sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, celeritatum initialium in C .

COROLLARIUM 2

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint ut $t^{\frac{1}{2}-m}$, descensus aequalibus absolventur temporibus, si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu res ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothese pariter t ascensuum inter se erunt aequalia. Curva autem erit cyclois, ostendimus.

COROLLARIUM 3

596. Quia est $ds = \frac{a^m dx}{x^m}$, erit

$$s = \frac{a^m x^{1-m}}{1-m}.$$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m < 1$, curvam AMC fore negativam seu perinde est, imaginariam. Semper enim curva maior esse debet quam

COROLLARIUM 4

597. Praeterea semper debet esse $ds > dx$; quare, quo hoc acc $x = 0$, debet m esse numerus positivus. Hinc nostra propositio requ m inter limites 0 et 1 contineatur.

COROLLARIUM 5

598. In his casibus maximus ipsius x valor erit a ibique erit $ds = 0$ seu tangens verticalis. Hocquo loco curva habebit cuspidem; altit ascendere nequit, quia, si $x > a$, foret $ds < dx$, quod fieri nequit.

COROLLARIUM 6

599. Si m contineatur intra limites 0 et 1, curva in C habebit tan horizontalem atque radius osculi in C erit

$$= \frac{s ds}{dx} = \frac{a^{2m} x^{1-2m}}{1-m}.$$

posito $x = 0$. Quare radius osculi in C erit infinite parvus, si $m < \frac{1}{2}$, si $m = \frac{1}{2}$, et infinite magnus, si $m > \frac{1}{2}$.

600. Tempora minimorum descensuum et ascensuum si $m < \frac{1}{2}$, at finita, si $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique uent ergo radiorum osculi in infimo puncto C ratione

SCHOLION

601. Habemus hic ergo exempla curvarum pro res duplicatam rationem celeritatum tenente, super quibus determinari. At si medium in maiore quam duplicata nusquam habebit tangentem horizontalem atque ideo nunquam finiri possunt. Quo autem in exemplo apparet corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratio investigare libet motum corporis super cycloide saltem sistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seri

PROPOSITIO 68

PROBLEMA

602. In medio uniformi, quod resistit in quadruplicata determinare tam descensum quam ascensum corporis quod ACB (Fig. 66, p. 255).

SOLUTIO

Posita potentia uniformi corpus perpetuo deorsum $CP = x$ et arcu $CM = s$ erit ex natura cycloidis $dx = C$ debita altitudini b et in M altitudini v atque expon resistencia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur

$$dv = -gdx + \frac{v^3 ds}{k^2} = -\frac{gs ds}{a} + \frac{v^3 ds}{k^2}$$

at pro ascensu ista

$$dv = -\frac{gs ds}{a} - \frac{v^3 ds}{k^2}.$$

Pro descensu ponatur

$$v = -\frac{k^2 dz}{z ds};$$

erit

$$dv = -\frac{k^2 d dz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$$

posito ds constante. Quamobrem habebitur

$$k^2 d dz = \frac{g s z ds^2}{a};$$

quae aequatio in seriem conversa dat

$$z = f + h s + \frac{f g s^3}{2 \cdot 3 a k^2} + \frac{h g s^4}{3 \cdot 4 a k^2} + \frac{f g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} + \frac{h g^2 s^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^2 k^4} \\ + \frac{f g^3 s^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 a^3 k^6} + \text{etc.}$$

Ad constantes f et h determinandas quaeratur valor ipsius v posito s .
erit ergo

$$b = -\frac{k^2 h}{f},$$

et quia, si $s=0$, est

$$dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2},$$

propter $dv = -\frac{k^2 d dz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ erit

$$\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 h^2}{f f},$$

quae aequatio cum illa congruit; erit ergo $h = -\frac{b f}{k^2}$. Hoc substituto erit

$$v = -\frac{b}{2a} - \frac{b g s^3}{3 a k^2} - \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 a^2 k^4} + \frac{b g^2 s^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 a^2 k^4} - \text{etc.} \\ 1 + \frac{b s}{k^2} + \frac{g s^3}{2 \cdot 3 a k^2} - \frac{b g s^4}{3 \cdot 4 a k^2} + \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} - \text{etc.}$$

Pro ascensu veroposito $-s$ loco s habebitur

$$v = -\frac{b}{2a} - \frac{b g s^3}{3 a k^2} + \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 a^2 k^4} + \frac{b g^2 s^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 a^2 k^4} - \text{etc.} \\ 1 + \frac{b s}{k^2} - \frac{g s^3}{2 \cdot 3 a k^2} - \frac{b g s^4}{3 \cdot 4 a k^2} + \frac{g^2 s^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 a^2 k^4} + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus invenitur

ponatur $v=0$ atque valor ipsius s investigetur. Ut
valde magna, erit arcus descensus, qui sit E ,

$$= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}} + \text{etc.}$$

At sequens arcus ascensus, qui sit F , erit

$$= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{301a^2b^4\sqrt{g}}{450g^2k^4\sqrt{2ab}} - \text{etc.}$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

603. Si ergo resistentia est quam minima, erit summa
et ascensus seu arcus una semioscillatione descriptus, i.

$$E + F = \frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \text{ quam proxime.}$$

COROLLARIUM 2

604. Differentia autem inter arcus ascensus et descen-

$$E - F = \frac{16ab^3}{15gk^2} = \frac{g(E+F)^4}{60ak^2}.$$

Quare differentia inter arcus descensus et ascensus
summae arcuum.

1) Editio princeps:

$$= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} + \text{etc.}$$

Evolvendo arcum s secundum potestates quantitatis $\frac{1}{k}$, EULERUS in ser-

$$b = \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^2}{3ak^2} + \frac{g^2s^2}{2 \cdot 3 \cdot 6a^2k^2} - \frac{bg^2s^2}{3 \cdot 4 \cdot 6a^3k^4} + \frac{g^3s^2}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6a^4k^4} - \frac{g^2s^2}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8a^5k^4} + \text{etc.}$$

neglexit hocquo modo valorem coefficientis membri tertii vero fractione

$$2) \text{ Editio princeps: } = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} - \text{etc.}$$

SCHOLIUM 1

Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionem esse biquadrato summae arcuum seu

$$E - F = \frac{g(E + F)^4}{60ak^3}.$$

Item vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatis resistit, esse arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{3gk}$$

ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2ab}{3gk},$$

$$E + F = \frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} \quad \text{et} \quad E - F = \frac{4ab}{3gk} = \frac{(E + F)^2}{6k}.$$

Quare in hac resistantia est differentia inter arcus ascensus et descensus quadratum summae arcuum. Atque in medio, quod in simplici celeritatum resistit, si fuerit rarissimum, est

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi a \sqrt{b}}{4g\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{\pi a \sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$$

Quare erit

$$E - F = \frac{\pi a \sqrt{b}}{2g\sqrt{k}} = \frac{\pi(E + F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}.$$

Differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis. Ex qua consequi videtur in medio quocumque rarissimo, quod in $2m$ -multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus ascensus et descensus super cycloide proportionalem esse potestati summae arcuum, cuius exponent sit $2m$. Atque in hac resistantia hypothese coniectare licet fore arcum descensus

$$E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m ab^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m + 1) g k^m}$$

ascensus

$$F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m ab^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m + 1) g k^m}.$$

Unde fit

$$E - F = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m g^{m-1} (E + F)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1) 2^{2m-1} a^m}$$

Quoties ergo m est numerus integer seu $2m$ numerus aequatio inter $E - F$ et $E + F$; at si m fuerit fractionis $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}$ per methodum interpolationis (Comment. Acad. Petrop. A. 1730¹⁾), investigari potest, constat, si $2m$ fuerit numerus impar, valorem latus quadraturam circuli, quemadmodum etiam in casu, si

SCHOLION 2

606. Quod quidem ad ipsam propositionem attinet, arcus descensus et ascensus super cycloide in totum arcuum, in quotuplicata ratione celeritatum sit res minima, NEUROXUS in *Princ. demonstravit*²⁾. Atque ex ipsa aequatione

$$dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^m ds}{k^m}$$

derivare licet. Ponatur enim

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q,$$

ubi Q erit quantitas valde parva pro b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hinc

$$-\frac{gsds}{a} + dQ = -\frac{gsds}{a} + \left(b - \frac{gs^2}{2a}\right) \frac{ds}{k^m}$$

pro descensu seu

$$Q = \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

1) L. EULERI Commentatio 13 (indicis ENESTROMIANI): De pro-
 quarum termini generales algebraice dari nequeunt, Comment. A.
 1738, p. 36; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series I, vol. 1-1.

2) I. NEWTON, Philosophiae naturalis principia mathematica
 XXXI. P. St.

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

descensu

$$v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab - gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$$

$v = 0$, et quia tunc proxime est $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, ponatur

$$s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q;$$

$$0 = -\frac{gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m}$$

$$q = \frac{a}{2gb} \int \frac{(2ab - gss)^m ds}{(2ak)^m},$$

em post integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. At quia in hoc ipsius g ipsarum \sqrt{b} et s sunt $2m$ dimensiones, habebit q huiusmodi formam Quocirca erit arcus descensus

$$L = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$$

descensus

$$L' = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m.$$

ergo habebitur

$$L - L' = 2Nb^m = \frac{Ng^m(L + L')^{2m}}{2^{2m} - 1 a^m}.$$

nerus N obtinebitur ex formula

$$\frac{a}{2gb} \int \frac{(2ab - gss)^m}{(2abk)^m} ds,$$

integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec est demonstratio illius quod in praecedente scholio ex inductione derivabamus. Erit enim nerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmativus; at si

2m fuerit numerus integer impar, inventio numeri N a-
pendebit. Generaliter autem valor ipsius q cum hac exp

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2mab^m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)gk^m}$$

congruit.

PROPOSITIO 69

PROBLEMA

607. In medio, quod resistit in quadruplicata ratione
corporis super curva AMC (Fig. 67) ex dato puncto A de-
locis celeritas, invenire celeritatem eiusdem corporis descensu
puncto E incipientis.

SOLUTIO

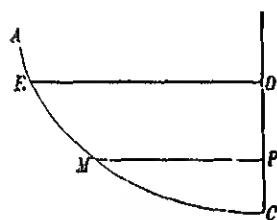


Fig. 67.

Posito $CP = x$ et $AM =$
delapsi celeritas in M debita
quantitas u ergo per hypothe
Iam si corpus descensum ex
incipiat, sit celeritas in M
Aequatio vero motuum determi-

$$dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2},$$

quae dat valorem ipsius v , ubicunque descensus inciperit

$$du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}.$$

Ponatur $v = u - q$; erit

$$du - dq = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2} - \frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2}$$

ex qua aequatione propter

$$du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

oritur

$$-dq = -\frac{2qu ds}{k^2} + \frac{q^2 ds}{k^2} \quad \text{seu} \quad -\frac{dq}{q} + \frac{2u ds}{k^2 q}$$

multiplicata per $e^{\frac{2fuds}{k^2}}$ dat hanc integalem

$$c e^{\frac{2fuds}{k^2}} = cq + q \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} \frac{ds}{k^2},$$

prodit [mutata significatione litterae c]

$$q = \frac{k^2 c e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}.$$

erit

$$v = u - \frac{k^2 c e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{c + \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds},$$

aequatione integralia

$$\int \frac{uds}{k^2} \quad \text{et} \quad \int c e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds$$

accepta, ut evanescant pesilo $s=0$. Sit nunc altitudo celeritatis in A $=a$, si descensus ex A fiat, at altitudo celeritatis in C debita, si ex B fit, $=b$; erit $b = a - \frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur

$$v = u - \frac{(a-b)k^2 c e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}.$$

ergo celeritate in C , nempe Vb , inveniatur punctum E , in quo descensus ex hac aequatione

$$u = \frac{(a-b)k^2 c e^{\frac{2fuds}{k^2}}}{k^2 + (a-b) \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds},$$

valor ipsius s dabit arcum CME . Quia igitur datur u per s , ex aequatione celeritas corporis ex quocunque alio puncto delapsi super AMC inveniatur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

608. Si valor ipsius v ita immutetur, ut tam in denominatore b sine coefficiente appareat, prodibit

$$v = \frac{\left(u \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}} \right)}{\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds} \cdot \left(b - a + \frac{\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds}{k^2} \right)$$

Atque erit $v = 0$, si est

$$u + \frac{k^2 u}{u \int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2fuds}{k^2}}} = b,$$

COROLLARIUM 2

609. Quia est

$$du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g dx,$$

erit huius aequationis per $e^{\frac{fuds}{k^2}}$ multiplicandae integral

$$u = a e^{\frac{fuds}{k^2}} - g e^{\frac{fuds}{k^2}} \int e^{\frac{fuds}{k^2}} dx$$

integralibus ita sumtis, ut evanescant posilo s vel $x =$

$$\frac{du}{u} + \frac{g dx}{u} = \frac{u ds}{k^2}$$

atque hinc

$$\int \frac{u ds}{k^2} = l \frac{u}{a} + \int \frac{g dx}{u}.$$

Quare erit

$$e^{\frac{fuds}{k^2}} = e^{\frac{fuds}{k^2}} \frac{u}{a},$$

unde dx loco ds in aequatione superiore potest intro-

COROLLARIUM 3

0. Si resistentia fuerit quam minima, evanescet $\int e^{\frac{2fuds}{k^2}} ds$ prae k^2 et

$$v = u - (a - b)e^{\frac{2fuds}{k^2}} = u - (a - b)\left(1 + \frac{2fuds}{k^2}\right)$$

k quantitatem maximam. Quamobrem erit

$$b + \frac{2bfuds}{k^2} - a - \frac{2afuds}{k^2} + u = \left(1 + \frac{2fuds}{k^2}\right) \left(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2fuds}{k^2}}\right).$$

COROLLARIUM 4

. Cum autem sit

$$\sqrt{\left(1 + \frac{2fuds}{k^2}\right)} = 1 + \frac{fuds}{k^2},$$

momentum temporis

$$\frac{ds}{Vv} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + fuds) \sqrt{\left(b - a + \frac{u}{k^2 + 2fuds}\right)}}.$$

variationem autem

$$du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

in proxime

$$u = a - gx + \int \frac{(a - gx)^2 ds}{k^2},$$

et

$$\int u ds = \int (a - gx) ds$$

$$\frac{ds}{Vv} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + f(u - gx) ds) \sqrt{\left(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + f(u - gx)^2 ds}{k^2 + 2f(u - gx) ds}\right)}}$$

$$= \frac{k^2 ds}{(k^2 + f(u - gx) ds) \sqrt{\left(b - \frac{gk^2 x - f(u^2 - g^2 x^2) ds}{k^2 + 2f(u - gx) ds}\right)}}$$

SCHOLIUM

. Quomadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesis excepta ea, quae est constans, hanc habet

praerogativam, ut corporis super quacunque curva in
 locis ex aequatione curvae possit definiri, ita haec res
 hoc prae reliquis excellit, quod ex dato unico descensu
 omnes descensus et ascensus possint determinari. In
 operatio, qua hic usi sumus, non succedit neque ad
 qua indeterminatae a se invicem separari possunt.
 stentia constans est simplicissima eamque sequitur ea
 tatum est proportionalis, ita post has pro simplicissima
 est habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione cele
 ex his parum commodi ad motum in hac resistentia
 obtineri, quia unus descensus tanquam datus accipi
 neque est difficilis ac quisque alius. At si plures
 et inter se comparantur, aequatio

$$dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$$

re ipsa tres variables implicat, nempe praeter v et
 puncto C , quae in variis descensibus variatur. Quare
 aequationis ad hanc aequationem

$$du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$$

reducerimus, quae ad unicum descensum spectat, i
 variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope istius
 inter se comparari possunt, quod in aliis resistentiis
 fieri potest. Atque hinc etiam multa problemata inv
 hypothesis resolvi possunt, quae in aliis omnino tract

PROPOSITIO 70

PROBLEMA

613. Si resistentia fuerit quam minima respectu pot
 et proportionalis potestati cuicunque celeritatum, determi
 quacunque curva AM (Fig. 68, p. 303).

SOLUTIO

Descendat corpus super curva AM descensus in
 natur super axe verticali abscissa $AP = x$, arcus A

corsum trahens = g . Sit celeritas in M debita altitudini v et resistibidem $\frac{v^m}{k^m}$, ita ut resistentia sit proportionalis potestati exponentis altitudinis. His positis erit

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m};$$

resistentia ponitur valde parva, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ ter exiguus atque propterea $v = gx$ quam Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$; erit

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds$$

nili modo adhuc propius

$$v = gx - \frac{g^m}{k^m} \int x^m ds + \frac{m g^{2m-1}}{k^{2m}} \int x^{m-1} ds \int x^m ds.$$

Integralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = 0$. Hinc ergo erit

$$v = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m g x \sqrt{gx}} - \frac{m g^{2m} \int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^3 x \sqrt{gx}} + \frac{3g^{2m} (\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^3 x^3 \sqrt{gx}} + \text{etc.}$$

Impulsus descensus per AM erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds \text{ quam proxime.}$$

Descensus ad fixum punctum C (Fig. 67, p. 298) usque desideratur descensus ex puncto E facto, ponatur puncti E supra C altitudo $CD = a$, abscissa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus positis hic superiorum reductur, si ibi lece x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds . altitudo celeritati in M debita vecetur v , erit

$$v = \frac{1}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^m \int (a-x)^m ds}{k^m} + \frac{m g^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds \text{ quam proxime.}$$

Integralia ita sunt accipienda, ut evanescant posito $x = a$. Atque per arcum EM est

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds \text{ quam proxime,}$$

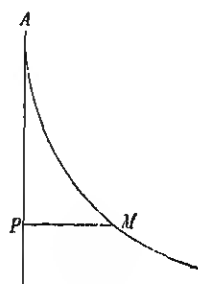


Fig. 68.

Simili modo, si corpus ex C super curva CM E a qua ad punctum E usque perlingere possit, vacuo habebunt, si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob

$$v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds \int$$

atque tempus ascensus per ME

$$= - \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m$$

omnibus his integralibus quoque ita acceptis, ut Atque hoc modo tam descensus corporis super oscillationes super curva idonea in medio rarissimo Q. E. I.

COROLLARIUM 1

614. Apparet ex his, quod quidam per se intall resistente super curva AM (fig. 68, p. 303) descendat minorem, quam si corpus in vacuo super eadem c tempus in medio resistente minus est quam temp vacuo.

COROLLARIUM 2

615. Altitudo celeritati in puncto infimo C (l dabit, si in expressione ipsius v ponatur $x = 0$. H

$$v = ga + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds \text{ quam p}$$

posito post integrationem supra praescripto modo $\int (a-x)^m ds$ ita capiatur, ut evanescent posito $x = a$

$$v = ga - \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds,$$

si post integrationem ponatur $x = a$. Id quod ad

COROLLARIUM 3

At pro ascensu celeritas corporis in C , qua ad B usque ascendere
ita erit altitudini

$$= ga + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds,$$

integrale ita accipiat, ut evanescat posito $x=0$, atque post inte-
ponatur $x=a$.

COROLLARIUM 4

Sit altitudo debita celeritati corporis in $C=b$, quam iam descon-
 $DEM C$ acquisivit et qua iterum super eadem curva ascendet; ponatur
 OC descensu percurra ut ante a et altitudo, ad quam ascensu per-
 d ; erit d quantitas valde parva atque ideo

$$b = ga + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds = ga - gd + \frac{g^m}{k^m} \int (a-x)^m ds$$

$$d = \frac{2g^{m+1}}{k^m} \int (a-x)^m ds$$

$$d = \frac{2ga - 2b}{g}$$

COROLLARIUM 5

Quia tempus descensus per EM est

$$= - \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$$

alibus ita acceptis, ut evanescant posito $x=a$, erit tempus per MC

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds,$$

alia ita accipiantur, ut evanescant posito $x=0$. Atque simili modo
erit tempus per CM

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds.$$

COROLLARIUM 6

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus inveniri poterit, si in his posterioribus formulis ponatur post. inter-

SCHOLIUM

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis inveniendum pertinent, progredior ad quaestiones inversas, quae incognita sunt, investigantur. Et primum huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis sive datur et curva quaeritur, quo motum illi scalae conveniens medio quocunque resistente; potentiam vero absolutam constantem et deorsum directam assumemus.

PROPOSITIO 71

PROBLEMA

621. In medio, quod resistit in ratione quacunque motus, invenire curvam AM (Fig. 69), super qua corpus ita descendit, ut punctis M celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis est altitudini PL datae curvae BL .

SOLUTIO

Posita $AP = x$ et $PL = v$ dabitur aequatio inter x et v a curvae BL datam. Iam sit arcus $AM = s$ et exponens rationis potentiae ad altitudinem $2m$, cui resistentia est proportionalis; quibus po-

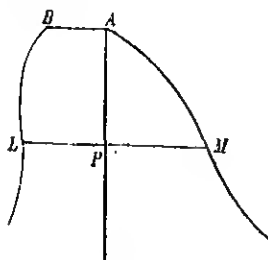


Fig. 69.

$$dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$$

denotante g potentiam uniformem et k exponentem rationis potentiae ad altitudinem, igitur aequationo est

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

Ex quo apparet in loco curvae BL respondente applicati
atque ibi curvae BL tangentem fore horizontalem, quia
maius erit quam dx .

COROLLARIUM 4

625. Curvae AM tangens, ut vidimus, est verticalis

$$dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}.$$

Quo igitur curva in initio A , ubi celeritas sit nulla, habet
calem, oportet, ut ibi sit $dv = gdx$ seu $v = gx$. Hoc
anguli, quem curva BL in A cum AP constituat, erit =

COROLLARIUM 5

626. Cum sit

$$ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

erit elementum temporis

$$\frac{ds}{v} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+1}}.$$

Quocirca tempus descensus per AM erit

$$= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}.$$

SCHOLIUM 1

627. Si curva BL super AB ascenderet, tum curva
vergoreat atquo loco descensus problemati satisfaceret
curva. Fit enim hoc casu abscissa x negativa ideoque
quamobrem habebitur ista aequatio

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m},$$

quae oritur ex aequatione

$$dv = -gdx - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

aturam ascensus continente. Simili modo, si curva BL ita est comparata, rursus ascendat, tum curva AM quoque sursum dirigetur et partem ascensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

EXEMPLUM 1

628. Si quaeratur curva AM , super qua corpus acquabiliter moveatur celeritate scilicet altitudini b debita, erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit

$$ds = \frac{gk^m dx}{b^m}.$$

unde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet, fore $= \frac{b^m}{gk^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP , atque si fuerit $b^m = gk^m$, tum linea quaesita ipsa est verticalis AP . At si b^m maior proponeretur quam gk^m , tum solutio periret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior sinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM descensu absolvitur, erit

$$s = \frac{gk^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}.$$

EXEMPLUM 2

629. Quaeratur curva AM , super qua corpus ita descendat, ut celeritas in singulis punctis sit ut radix quadrata ex altitudine AP , quae proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$ et $dv = \alpha dx$ atque substitutis habebitur

$$ds = \frac{gk^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m} \quad \text{et} \quad s = \frac{(g - \alpha)k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m},$$

ubi constantis additione non est opus, si $m < 1$. At si $m = 1$, curva tractoria super linea horizontali per A transiente descripta; super qua corpus in infinita distantia, concursu scilicet tractoriae cum asymptoto, descensum accipit. Simili modo, si $m > 1$, curva formam habebit tractoriae similem, semper autem esse debet $\alpha < g$; ex quo perspicitur corpus in medio recte descendente non tantam acquirere celeritatem quantum in vacuo. Dein

quia ds maius esse debet quam dx , erit $(g - \alpha)k^m > \alpha^n x$
 titudinis descendere nequit quam per altitudinem

$$= \frac{k}{\alpha} {}^m V(g - \alpha);$$

quo loco curvae tangens erit verticalis curvaque punctum
 Tempus autem, quo corpus per arcum AM descendit, erit

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{2(g - \alpha)k^m x^{\frac{1}{2} - m}}{(1 - 2m)\alpha^{m + \frac{1}{2}}}.$$

Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$, tempus non potest esse finitum
 magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$, curva erit cyclois deorsum
 vertice A corpus perpetuo permanebit.

COROLLARIUM 6

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non
 posse continuari, ita ut celeritates semper sint in
 altitudinum.

COROLLARIUM 7

631. Ex his apparet omnes curvas hoc modo in
 tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in
 tudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi
 quod evenit, si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit;
 tempus fit finitum, intelligitur.

SCHOLION 2

632. Si corpus ex A descendens incipiat atque curva
 non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia
 ibi $dv = gdx$. Quamobrem quo loco AM curva prod
 tangentem horizontalem, curva BL , quae in A conveni
 esse comparata, ut in ipso initio sit $v = gx$; seu tang
 cum axe AP angulum constituere debet, cuius tange
 enim curva AM non angulum acutum cum AP con

ascendendo semper esse debet $v < gx$; in medio enim resistente celeritas quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam vorticalem delaberetur; quia curva verticalis est brevissima et citissime descensu absolvitur, corpus quod minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curva BL ita debet esse comparata, ut v ubique sit minor quam altitudini debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Ubi enim v hanc altitudinem superat, ibi curva AM fit imaginaria.

SCHOLIUM 3

633. Simili modo res se habet, si pro ascensu detur curva BL (Fig. 70), cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curva inveniendae AME in punctis M . Dictis enim $AP = v$, $PL = v$ et $AM = s$ erit

$$ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}.$$

Ubi igitur ds sit negativum, oportet, ut dv habeat valorem negativum, i. e. ut curva BL continue ad axem AD convergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curvae BL ad punctum L cum axo AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque pro hoc sufficit, sed praeterea $-dv - gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$.

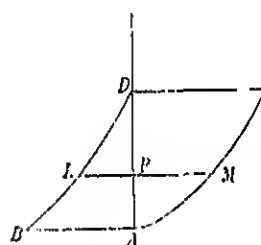


Fig. 70.

$$-dv > \frac{(gk^m + v^m)dx}{k^m},$$

Ubi differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Huiusmodi conditio huc redit, ut PL sit minor quam altitudo debita celeritati quam corpus in P haberet, si ex A celeritate altitudini AB debita per AD descendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. Propterea autem puncto D angulus ADB tantus esse debet, ut eius tangens $=g$, quia prope punctum E , in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus evanescit; sin vero iste angulus esset maior, curva AME in E tangentem haberet horizontalem, uti in praecedente scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72

PROBLEMA

634. Si datur curva AM (Fig. 71), super qua corpore venire curvam am , super qua corpus in medio resistente in a aequalis sit celeritati in A et sumtis arcibus AM et am celeritates in singulis punctis M et m sint quoque aequales.

SOLUTIO

Ductis axibus verticalibus AP et ap et horis $AM = am = s$, $AP = t$ et $ap = x$; propter curvam aequationem inter s et t celeritates in punctis M et m sunt aequales v . Sit p sollicitans g et k exponentis $2m$ erit pro motu in

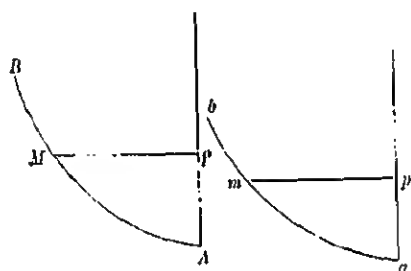


Fig. 71.

$$dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m};$$

et pro descensu in medio resistente super curva ma

$$dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m};$$

in qua aequatione si loco dv et v substituantur valores inventi, prodibit

$$-gdt = -gdx + \frac{(b-gt)^m ds}{k^m} \quad \text{sen} \quad dx = dt$$

Quia autem datur aequatio inter t et s , si loco t et s substituantur valores inventi, habebitur aequatio inter x et s pro curva quae

COROLLARIUM 1

635. Si in curva AM punctum B fuerit initium altitudo supra $A = \frac{b}{g}$, habebitur quoque in curva $amb = AMB$.

COROLLARIUM 2

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$; quare altitudo ap minor erit quam altitudo AP ; in medio enim resistente maiore opus est altitudo ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

COROLLARIUM 3

637. Quia in curvis AM et am sunt æqualibus arcibus celeritas in illis locis sunt æquales, tempora quoque, quibus æquales arcus AM et am describuntur, erunt æqualia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per bma æquale est tempori descensus in vacuo per BMA .

COROLLARIUM 4

638. Ne curva bma fiat imaginaria, oportet, ut sit ubique $dx < dt$. Hinc ob rem debet esse

$$dt + \frac{(b - gt)^m ds}{gk^m} < ds \quad \text{son} \quad gk^m dt < gk^m ds - (b - gt)^m ds.$$

Hoc autem ita se habet, si fuerit

$$gk^m dt < (gk^m - b^m) ds,$$

qui est casus, si t evanescit et pertinet ad punctum a , nisi t alieni valori negativum. Quocirca ad hoc tantum est respiciendum, ut punctum a fiat reale, quod evenit, si $gk^m dt$ non minus fuerit quam $(gk^m - b^m) ds$.

COROLLARIUM 5

639. Ne igitur curva am fiat imaginaria, ante omnia necesse est, ut $b < k\sqrt[3]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$; erit α numerus unitate maior et ideo

$$gk^m < \alpha(gk^m - b^m) \quad \text{son} \quad b < k\sqrt[3]{g\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)}.$$

Si ergo curva MA in A habeat tangentem horizontalem, debet esse $b < k\sqrt[3]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

COROLLARIUM 6

640. Sit autem, si fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A ,

$$b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha} k^m;$$

erit in ipso puncto a

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)}{\alpha} ds = ds.$$

Hoc ergo casu curva am in a tangentem habebit verticalem.

COROLLARIUM 7

641. In initio motus in B fit $b = gt$ seu $t = \frac{b}{g}$. Pro puncto a erit $dx = dt$ curvarum elementis sumtis aequalibus. Quare tunc punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

SCHOLION 1

642. Quia curva am non absolute ex curva AM construi praeterea nosse oportet celeritatem in puncto A seu descensus si in curva AM aliud descensus initium accipiatur, alia invenietur. Curvae ergo BMA et bma ratione unici descensus tantum ita coaequantur celeritates aequalibus percursis spatiis sint inter se aequales, ut in punctis initia descensus ponantur, haec convenientia non amittitur. Non igitur dantur duae curvae, super quibus descensus datum punctum usque inter se congruant, altera in vacuo, altera resistente constituta.

EXEMPLUM 1

643. Sit AMB linea recta utcumque inclinata, ita ut sit quaeratur curva amb , super qua corpus simili modo progrediatur resistente quo super AMB in vacuo. Posito autem $\frac{s}{\alpha}$ loco sequens aequatio inter x et s pro curva quaesita amb

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha b - gs)^m}{g \alpha^m k^m} ds,$$

cuius integralis est

$$x = \frac{s}{\alpha} + \frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} - \frac{(\alpha b - gs)^{m+1}}{(m+1)g^2 \alpha^m k^m}.$$

ctum a fiat imaginarium, oportet, ut

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{b^m}{gk^m} < 1.$$

fuert

$$b^m = \frac{(\alpha - 1)gk^m}{\alpha},$$

n a habebit tangentem verticalem neque propterea b maiorem habere
valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta
ae descendisse, ut fiat

$$b = k \sqrt[m]{g(\alpha - 1)};$$

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(k^m g \alpha^{m-1} (\alpha - 1) - g s^m) ds}{g \alpha^m k^m},$$

t aequatio pro curva amb , in qua initium descensus in b est capien-
bi est $ds = \alpha dx$, seu arcus amb erit

$$= k \int \frac{\alpha^{m-1} (\alpha - 1)}{g^{m-1}}.$$

tentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, erit $m = 1$ ideoque

$$dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(gk(\alpha - 1) - gs)ds}{g\alpha k} = ds - \frac{sds}{\alpha k}$$

rando

$$x = s - \frac{ss}{2\alpha k}.$$

t aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli
oris diamoter est $\frac{\alpha k}{2}$.

COROLLARIUM 8

. Sit ergo super basi horizontali CB (Fig. 72, p. 316) descripta cyclois
circulo generatore ANC et sit medium resistens in duplicata ratione
um, cuius exponens sit $=k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda
ducaturque horizontalis PNM et ex M tangens MT atque duo

corpora ponantur descendere, alterum super MT in vacuo curva MB in medio resistente, ambo haec corpora aequalia spatia absolvent.

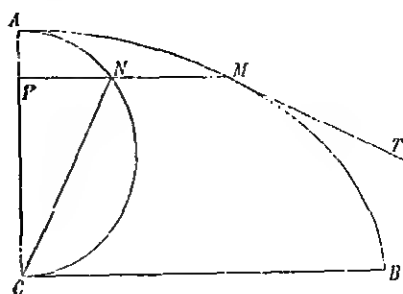


Fig. 72.

EXEMPLUM 2

645. Sit curva AMB (Fig. 71, p. 312) cyclois descensu circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$. His ergo substitutis prodibit pro curva amb sequens aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m};$$

vel si totus arcus AMB , qui in vacuo descensu absolvi poterit $b = \frac{gac}{2a}$ ideoque pro curva amb orietur ista aequatio

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}.$$

Ne igitur haec curva in puncto a fiat imaginaria, oportet si vel altitudo arcus AB minor esse debet quam $\frac{k}{g} \sqrt[4]{g}$; nam arcus $AB = \frac{k}{g} \sqrt[4]{g}$, tunc curvae amb tangens in b erit verticalis sit cuspis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ seu $c = a$, et si sit praeter quo curvae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur ista

$$dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}};$$

quae curva in duobus punctis a et b habebit tangentes ver-

COROLLARIUM 9

646. Cum igitur corpus in vacuo super cycloide ita descendat, ut accelerationes sint spatiis percurrendis proportionales, eandem proprietatem habebit descensus in medio resistente super curva bma , si initium descensus capiatur in puncto b , quod per aequationem ad curvam amb determinabitur, scilicet $amb = c$.

COROLLARIUM 10

647. Si in curva AMB aliud descensus initium B capiatur, tota curva amb alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ constabit. Quare, etiamsi cyclois sit curva tautochronea in vacuo, curva amb tamen non erit in medio resistente, quia pluribus descensibus super AMB totidem curvae diversae in medio resistente respondent.

SCHOLIUM 2

648. Curvae hoc exemplo erutae sunt eae ipsae, quas Clar. HERMANNUS in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis resistantibus invenit;¹⁾ sed ipse demonstravit eas quaesito satisfacere non posse. Ceterum intelligitur simili modo in medio resistente curvam posse inveniri, super qua corpus ascendendo eodem modo moveatur quo super data curva in vacuo descendendo. Si enim puncta A et a initia ascensus, illud in vacuo, hoc in medio resistente, sit quo celeritas initialis debita altitudini b ; habebitur pro curva amb aequatio

$$dx = dt - \frac{(b - gt)^m ds}{gk^m};$$

qua aequatione intelligitur curvam amb non dari posse imaginariam, sed curvam AMB talis fuorit. Nam quia, ne curva amb sit imaginaria, debet $dx < ds$, hic dx minus est quam dt , quod per se minus est quam ds . Si linea AMB sit linea verticalis, altera amb poterit assignari; nam si $AMB = c$ erit $b = gc$ et $s = t$; quare pro curva amb invenitur ista aequatio

$$dx = ds - \frac{g^{m-1}(c - s)^m ds}{k^m},$$

1) IAO. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in eadem directione agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139. P. St.

cuius integralis est

$$x = s + \frac{g^{m+1}(c-s)^{m+1} - g^{m+1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}.$$

Accommodetur haec aequatio ad resistantiam quadraticam celeritatum; fiet $m = 1$ ideoque erit

$$x = s + \frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k},$$

quae est ad cycloidem hoc modo: describatur cyclois AMB (F) circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$ super basi horizontali BC ; arcus $AM = k - c$; erit M initium ascensus, ex quo puncto, si MA ascendat celeritate altitudini gc debita, in medio resistente ratione celeritatum eodem modo movebitur quo in vacuo eadem initiali sursum ascendens verticaliter.

PROPOSITIO 73

PROBLEMA

649. Si potentia fuerit uniformis et deorsum directa mediumque quacunque multiplicata celeritatum resistat, determinare curvam AH super qua corpus descendendo secundum horizontalem AM aequabiliter

SOLUTIO

Sit A curvae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita

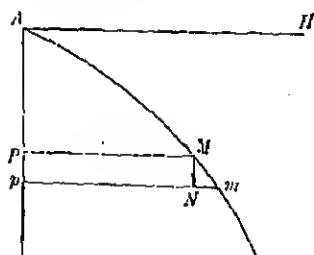


Fig. 73.

Sumatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = s$ sitque corporis in M debita altitudini v , qua celeritate montum $Mm = ds$ percurrent. Erit $e = \frac{v}{dy}$ ita corporis celeritas per Mm , ad celeritatem horizontalem \sqrt{b} , unde

$$v = \frac{bds^2}{dy^2}.$$

Iam sit potentia sollicitans $= g$, opponens resistantiae $=$

resistentia = $\frac{v^m}{k^m}$. His positis erit

$$dr = gdx - \frac{v^m ds}{k^m},$$

quae aequatio, si loco r valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam c quaesitae. Sit autem $ds = pdy$; erit

$$v = bp^2 \quad \text{et} \quad dx = dy \sqrt{(p^2 - 1)}.$$

Quocirca habebitur

$$2bpdp = gdy \sqrt{(p^2 - 1)} - \frac{b^m p^{2m+1} dy}{k^m},$$

quae separata dat

$$dy = \frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Curvae igitur quaesitae sequens erit constructio: sumto

$$y = \int \frac{2bk^m p dp}{gk^m \sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}$$

erit

$$x = \int \frac{2bk^m p dp \sqrt{(p^2 - 1)}}{gk^m \sqrt{(p^2 - 1)} - b^m p^{2m+1}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$ atque per v definiantur y et x , erit

$$y = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}} \quad \text{atque} \quad x = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}.$$

Similique modo hinc erit arcus

$$s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{gk^m \sqrt{(v-b)} - v^m \sqrt{v}}.$$

Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit

$$ds = \frac{dy \sqrt{v}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy \sqrt{(v-b)}}{\sqrt{b}} \quad \text{atque} \quad ds = \frac{dx \sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}.$$

651. Quia aequatio

$$dy = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{(v \dots b)} - v^m \sqrt{v}}$$

est separata, ex ea solutio particularis quaesito sci-
ciendo denominatorem

$$gk^m \sqrt{(v \dots b)} - v^m \sqrt{v} = 0,$$

unde erit ipsa celeritas \sqrt{v} constans. Sit ergo $v =$
atque ideo

$$ds = \frac{gk^m dx}{gk^m}$$

pro linea recta inclinata, ut supra iam invenimus (§

COROLLARIUM 3

652. Quo autem corpus data celeritato, quae
horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c - b)}$
tudo c . Qua inventa habebitur inclinatio rectae satis-
poris initialis \sqrt{c} in A , qua aequabiliter per rectam

COROLLARIUM 4

653. Si resistentia evanescat corpusque in vacuo
ideoque

$$x = \int \frac{dv}{g} \quad \text{scilicet} \quad v = g(a + x)$$

atque

$$dy = \frac{dx \sqrt{b}}{\sqrt{(ga + gx \dots b)}}.$$

Integrando ergo fiet

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{b}(ga + gx - b) - \frac{2}{g} \sqrt{b}(ga$$

quae est aequatio pro parabola, quam corpus proie-

aequatione erit

$$ds = \frac{dx \sqrt{v}}{\sqrt{b}},$$

quo valore in aequatione substituto habebitur

$$dv = gdx - \frac{v^{n+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}} \quad \text{sen} \quad dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}.$$

Quamobrem erit

$$x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}, \quad s = \int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}},$$

atque applicata

$$PM = y = \int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}.$$

Ex quibus aequationibus constructio curvae quaesitae con-

COROLLARIUM 1

656. Ex his tribus aequationibus, si desideretur non tantum consistens, accipi potest ea, ex qua valor ipsius x terit inveniri, isque deinceps in alterutra reliquarum subs-

COROLLARIUM 2

657. Quia aequatio

$$dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$$

indeterminatas a se invicem habet separatas, poterit soluti tineri ponendo

$$gk^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v} = 0.$$

Hinc igitur erit

$$v = g^{\frac{2}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$$

ideoque

$$ds = \frac{1}{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}} dx.$$

Satisfacit ergo linea recta inclinata, si corpus data celeritate moveatur.

SOLUTION 1

58. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solue-
 praebet particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente
 inclinata inveniri possit, super qua corpus aequabiliter moveatur, ut
 (§ 628) ostendimus. Ille autem ipso casus utrique problemati satisfacit;
 si corpus super recta aequabili motu incedit, tum horizontaliter quam
 liter aequabiliter quoque promovetur; quin etiam secundum quan-
 tae plagam aequabiliter fertur.

COROLLARIUM 3

59. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque

$$ds = \frac{dx \sqrt{gx}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx \sqrt{(gx - b)}}{\sqrt{b}},$$

aequatio integrata dat

$$y = \frac{2(gx - b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$$

aequationem parabolam cubicalem rectificabilem, ut supra (§ 258) iam invenimus.

EXEMPLEM 1

60. Ponamus resistantiam ipsis celeritatibus proportionalem; erit $m = \frac{1}{2}$
 e

$$x = \int \frac{dv \sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} = \sqrt{bk} \int \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v},$$

nam abscissarum in eo puncto accipiamur, ubi v evanescit. Ex hac autem
 aequatione prodit

$$e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk} - v} \quad \text{seu} \quad v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}} (e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} - 1) g\sqrt{bk} = g\sqrt{bk} (1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}).$$

in hac ipsius v substituto habebitur

$$ds = \frac{dx \sqrt{g(1 - e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})} \sqrt{bk}}{\sqrt{b}}.$$

Vel cum sit

$$ds = \frac{dv \sqrt{kv}}{g \sqrt{bk - v}},$$

ponatur $v = u^2$; erit

$$ds = \frac{2u^2 du \sqrt{k}}{g \sqrt{bk - uu}} = \frac{2gk du \sqrt{b}}{g \sqrt{bk - uu}} - 2du \sqrt{k},$$

quae integrata dat

$$s = \sqrt[4]{g^2 b k^3} l \frac{\sqrt[4]{g^2 b k} + \sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2 b k} - \sqrt{v}} - 2 \sqrt{kv},$$

in qua valor ipsius v ante inventus substitui potest, quo p
inter x et s .

EXEMPLUM 2

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratio
ideoque

$$dx = \frac{k dv \sqrt{b}}{gk \sqrt{b - v} \sqrt{v}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{k dv \sqrt{v}}{gk \sqrt{b - v} \sqrt{v}}.$$

Huius posterioris aequationis integrale est

$$s = \frac{2k}{3} l \frac{gk \sqrt{b}}{gk \sqrt{b - v} \sqrt{v}},$$

ex qua oritur

$$e^{\frac{3s}{2k}} = \frac{gk \sqrt{b}}{gk \sqrt{b - v} \sqrt{v}}$$

atque

$$\text{Quocirca erit} \quad \frac{3}{v^{\frac{3}{2}}} = gk \left(e^{\frac{3s}{2k}} - 1 \right) e^{\frac{-3s}{2k}} \sqrt{b} = gk \left(1 - e^{\frac{-3s}{2k}} \right) \sqrt{b}.$$

$$\sqrt{v} = \sqrt[3]{gk \left(1 - e^{\frac{-3s}{2k}} \right) \sqrt{b}};$$

qui valor in aequatione $dx = \frac{ds \sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem
pro curva quaesita.

SCHOLION 2

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curvas det
super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deors
liter feratur, ita simili modo problema resolvi potest, si corp

manvis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipsam autem quaestione-
quia nihil concinni ex solutione deduci potest, hic omisi; atque ob eandem
causam problema isochronae paracentricae in medio resistente non attingit
adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, n-
arum curiosum problema, quod a nemine adhuc est tractatum, pro medio
resistentibus; quod pro vacuo propositum non problema quidem est. Quaerit
cilicet curva, super qua corpus ad datum punctum maxima celeritate per-
ingrat; in vacuo enim corpus super quacunque curva motum in eodem loco
semper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75

PROBLEMA

663. *Inter omnes curvas puncta A et C (Fig. 75) iungentes determinare e-*
 AMC , super qua corpus ex A ad C descendens maximam acquirat celeritatem
existente resistenti in quacunque multiplicata ratione celeritatum et potentia u-
iformi deorsum tendente.

SOLUTIO

Quo corpus ad punctum C
maxima cum celeritate perveniat,
curvae quaesitae AMC duo quaequo
elementa Mm , $m\mu$ ita posita esse
debent, ut corpus ea percurrendo
maximum accipiat celeritatis incre-
mentum. Nam si corpus per alia
elementa Mn , $n\mu$ maius acquireret
celeritatis augmentum, maiorem quo-
que in C habiturum esset celeri-
tatem. Per methodum igitur maxi-
morum positio elementorum Mm , $m\mu$
invenietur, si elementa haec cum
proximis Mn , $n\mu$ comparentur et
celeritatis augmenta, quae per utraque generantur, inter se aequalia ponan-
Ducantur ad hoc ad axem verticalem applicatae MP , mp et $\mu\pi$ sicut

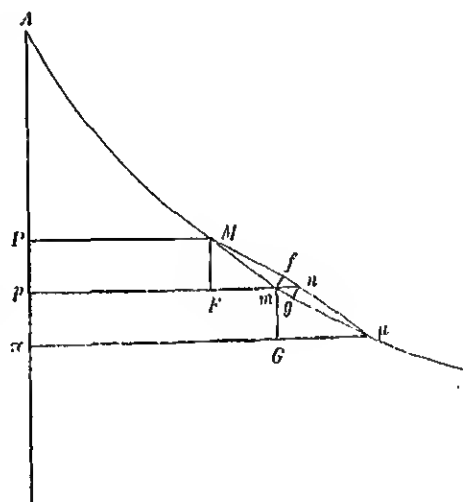


Fig. 75.

elementa axis Pp , $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MP ,
curvae elementa normales mf , ng . Iam sit potentia sollicitans $= g$
resistentiae $= k$, ipsa resistentia in $2m$ -multiplicata ratione cele
altitudo celeritati in M debita $= v$. His positis erit incrementum
per Mm

$$= g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}$$

et incrementum altitudinis celeritati debita, dum corpus per $m\mu$ p

$$= g \cdot mG - \frac{\left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m m\mu}{k^m}.$$

Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit, altitudo v accipit a

$$= g(MP + mG) - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m} - \frac{\left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m m\mu}{k^m}.$$

At elementa Mn , $n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum

$$= g(MP + mG) - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m} - \frac{\left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m}\right)^m n\mu}{k^m}.$$

Quibus sibi aequalibus positis habebitur

$$0 = v^m(Mn - Mm) + \left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m}\right)^m n\mu - \left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m m\mu$$

Est vero $Mn - Mm = nf$ et

$$\left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mn}{k^m}\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MP - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} \cdot Mn$$

atque

$$\left(v + g \cdot MP - \frac{v^m \cdot Mm}{k^m}\right)^m = v^m + m \cdot g v^{m-1} \cdot MP - \frac{m v^{2m-1}}{k^m} \cdot Mm$$

Nunc vero his valoribus substituendis proveniet haec aequatio

$$v(nf - mg) - m \cdot g \cdot MP \cdot mg - \frac{m v^m}{k^m} (Mn \cdot n\mu - Mm \cdot m\mu) = 0.$$

$$Mn \cdot n\mu - Mm \cdot m\mu = n\mu \cdot nf - Mm \cdot mg$$

triangula $nf m$, $m P M$ et $mg n$, $\mu G m$ similia est

$$nf = \frac{m P \cdot mn}{Mm} \quad \text{atque} \quad mg = \frac{\mu G \cdot mn}{m\mu}.$$

stituitis et per mn diviso prodit

$$v \left(\frac{m P}{Mm} - \frac{\mu G}{m\mu} \right) - m \cdot g \cdot \frac{M P \cdot \mu G}{m\mu} - \frac{m v^2}{k^2} \left(\frac{n\mu \cdot m P}{Mm} - \frac{Mm \cdot \mu G}{m\mu} \right) = 0.$$

Equationis duo priora membra sunt differentialia primi gradus, tertio, quia differentiali secundi gradus aequipollet, reici potest; fiet ergo

$$\frac{m \cdot g \cdot M P \cdot \mu G}{m\mu} + v \left(\frac{\mu G}{m\mu} - \frac{m P}{Mm} \right) = 0$$

$$\frac{m \cdot g \cdot M P \cdot m P}{Mm} + v d. \frac{m P}{Mm} = 0.$$

Equatione determinatur positio elementorum Mm et $m\mu$. Quo symbolis utamur, sit $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; erit $Pp = p\pi = dx$, y et $Mm = ds$ prodibitque

$$\frac{m \cdot g dx dy}{ds} + v d. \frac{dy}{ds} = 0.$$

vero canonica est

$$dv = g dx - \frac{v^2 ds}{k^2},$$

in loco $g dx$ ex superiore aequatione substituatur

$$- \frac{v ds}{m dy} d. \frac{dy}{ds},$$

$$dv + \frac{v ds}{m dy} d. \frac{dy}{ds} + \frac{v^2 ds}{k^2} = 0$$

$$\frac{m dv dy}{ds} + v d. \frac{dy}{ds} + \frac{m v^2 dy}{k^2} = 0.$$

$p ds$ et $v^{1-m} = u$; erit, ut sequitur,

$$p du + \frac{(1-m)}{m} u dp + \frac{(1-m)p ds}{k^2} = 0,$$

ex qua integrata prodit

$$u = \frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m} \int p^{\frac{1-m}{m}} ds.$$

Ex hoc u obtinebitur ergo vicissim $v = u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in superi

$$mgpds\sqrt[3]{(1-pp)} + vdp = 0$$

substitutus dabit aequationem inter p et s et consequenter inte

Ad curvam autem construendam hoc modo computum in
Posito $dy = pds$ habentur hae duae aequationes

$$\text{et} \quad mgpds\sqrt[3]{(1-pp)} + vdp = 0$$

$$dv = gds\sqrt[3]{(1-pp)} - \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Ex illa est

$$ds = \frac{-vdp}{mgp\sqrt[3]{(1-p^2)}},$$

qui valor in hac substitutus dat

$$mpdv + vdp = \frac{v^{m+1}dp}{gk^m\sqrt[3]{(1-pp)}}.$$

Haec divisa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale

$$\text{seu} \quad \frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt[3]{(1-pp)}}{gk^m p}$$

$$v^m = \frac{gk^m}{ap + \sqrt[3]{(1-pp)}} \quad \text{et} \quad v = \frac{k\sqrt[3]{g}}{\sqrt[3]{(ap + \sqrt[3]{(1-pp)})}}.$$

Quocirca erit

$$mgds = \frac{-kdp\sqrt[3]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{(ap + \sqrt[3]{(1-pp)})}}$$

et

$$mgdx = \frac{-kdp\sqrt[3]{g}}{p\sqrt[3]{(ap + \sqrt[3]{(1-pp)})}}$$

atque

$$mgdy = \frac{-kdp\sqrt[3]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{(ap + \sqrt[3]{(1-pp)})}}.$$

Ex quibus aequationibus facile est curvam quaesitam construere.

COROLLARIUM 1

664. Si radius osculi curvae in M versus axem directus vocetur r , erit

$$d. \frac{dy}{ds} = - \frac{dx}{r}.$$

quoque valore substituto habetur

$$\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r} \quad \text{sen} \quad \frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}.$$

vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curva moti, cuius directio est ab eadem directa, et $\frac{mgdy}{ds}$ est vis normalis. Quare in curva quaesita vis centrifuga contraria vi normali et se habet ad vim normalem ut $2m$ ad 1 , id est. exponens potestatis celeritatis, cuius resistentia est proportionalis, ad unitatem.

COROLLARIUM 2

665. Haec igitur omnes curvae parte concava sunt deorsum directae. Quia enim vis normalis directio deorsum respicit et radius osculi in eandem partem tendit, concavitas curvae quoque deorsum respicere debet.

COROLLARIUM 3

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Quare ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem in curva quaesito satisfactions erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum describit.

COROLLARIUM 4

667. Quia in aequatione

$$mgds = \frac{-kdp \sqrt[3]{g}}{p(1-p)^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(\alpha p + \sqrt[3]{(1-p)})}}$$

determinatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Prima dat aequatio $\alpha p + \sqrt[3]{(1-p)} = 0$, quo casu celeritas fit infinita et quaevis recta satisfacit. Secunda est $p = 1$ seu $dy = ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p = 0$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, ut corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

EXEMPLUM 1

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum; matur ex tribus inventis aequationibus ea, quae dy continet

$$dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})^2 \sqrt{(1-pp)}},$$

cuius integralis est

$$y = C - \frac{2gkp}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}.$$

Cum autem sit

$$p = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds},$$

erit

$$y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy + dx},$$

seu neglecta constante C , quia curvam non immutat, erit.

$$\alpha y dy + y dx + 2gk dy = 0.$$

Quae aequatio per y divisa et deinde integrata dat

$$\alpha y + x + 2gk \log y = C.$$

Quae est aequatio pro curva logarithmica ea ipsa, quam li projectoriam in hac resistantiae hypothesis invenimus.

EXEMPLUM 2

669. Sit nunc resistantia quadratis celeritatum proportio. Sumatur aequatio ista

$$ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}$$

Huius autem integralis est

$$s = kl \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} \quad \text{sive} \quad e^i = \frac{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}{\beta p} = \alpha$$

Hinc fit

$$\beta e^i dy - \alpha dy = dx \quad \text{atque} \quad ds = dy \sqrt{1 + (\beta e^i)^2}$$

quatio pro curva quaesita, quae hanc habebit proprietatem, ut
ga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curva igitur
rsum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis
In hac vero curva corpus ita movebitur, ut altitudo celeritati
sit

$$= \frac{gk}{a^{\frac{s}{k}} \beta p} = \frac{gkds}{\beta c^{\frac{s}{k}} dy} = \frac{gkds}{dx + ady}.$$

SCHOLIUM 1

um in quavis resistantiae hypothesei poenliaris ratio inter vim
et vim normalem locum habeat, vacuum autem tanquam casus
sistentiae considerari queat, sequitur in vacuo quamvis curvam
lobore. Omnes enim curvae in vacuo hanc habent proprietatem,
ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates, ideo
test definiri, quae potius quam reliquae quaesito satisfaciant.

SCHOLIUM 2

otatu dignum est, quod in omnibus his curvis inventis nusquam
oritas sit aequalis nihilo. Atque ideo problema hac methodo
olvi potest, ut determinetur inter omnes descensus ex *A* ad *C* ex
is is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaestioni
verticalis per *C* transiens et cum horizontali per *A* ducta con-
tact. Nostra autem solutio ita est comparata, ut duorum ele-
quorumquo contignorum positionem eam definiat, quae maximum
n celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea
itur, super qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis
acquirat quam super alia quacunque curva *A* et *C* iungente, si
t eadem celeritate descensum inchoet. Ex inventis autem colligi
ratione eam prodiro curvam, super qua minimum celeritatis in-
generetur, vel super qua corpus motu maxime uniformi feratur.
sionem facile perspicitur motum ex quiete incipere non posse.
onim certum est, si puncta *A* et *C* in linea verticali sunt posita.
verticali motu in *A* ex quiete facto maximam in *C* generari celo-
nem calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebet lineam
sed celeritatem initialem in *A* facit debitam altitudini $k\sqrt[3]{g}$, quae

celeritas tanta est, ut non amplius regeretur. celeritate corpus aequaliter ex A ad C descendet; hacque ratio hoc est minimum, capit celeritatis incrementum. Problema ergo consentaneum fuisset, ita proponi debuisset: inter omnes lineas a C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minimae celeritatis augmenta, atque simul celeritalem initialem in A huic commodatam defuere.

SCHOLION 3

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nostra problemata, in quibus temporum quadam lego data curvae elegantiae idoneae; sed cum temporum leges pleraeq. ad celeritates possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed unum negotio quaestionem de curvis brachystochronis tractabo, quia praescripta est conditio, ad celeritatum rationes, quas iam reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis utar, quo superius circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76

THEOREMA

673. In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum quocunque cu curva AMC (Fig. 76) est brachystochrona seu brevissima producit descensum, in qua est aequalis vi normali et in AM directa.

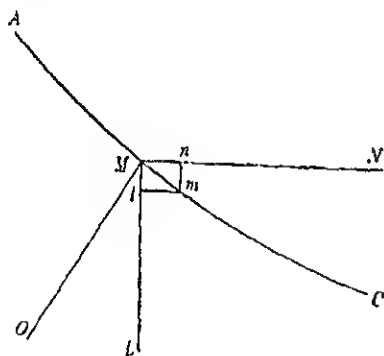


Fig. 76.

DEMONSTRATIO

Quaecumque fuerint potentiae in corpus in M agentes, eas se normales possunt resolvere. Si sit $ML = P$, altera MN curvae elemento $Mm = ds$ perpendicularis ml , mn sit $ML = P$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et radius osculi in $M = r$, quem pono sursum directum.

constante sit $r = \frac{ds^2}{dx dy}$. His positis erit

$$dv = Pdx + Qdy - Rds,$$

dy est vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At supra ex tystochronismi, si fuerit

$$dv = Pdx + Qdy + Rds,$$

ore

$$\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$$

e formulae ab hac nostra tantum in signo litterae R differunt, computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam secundalem MO agentem atque $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ est vis normalis iuxta MO raque vi P et Q orta. Quare si fuerit vis centrifuga vi normali in eandem plagam directa, curva erit brachystochrona. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

vis normalis, quae oritur ex resolutione potentiarum absolutarum instantium, vocatur N et vis tangentialis ex eadem resolutione orta erit

$$dv = (T - R)ds \quad \text{et} \quad \frac{2v}{r} = N,$$

equationes coniunctae dabunt curvam brachystochronam.

COROLLARIUM 2

quocumque igitur fuerit resistuntia, erit semper $v = \frac{Nr}{2}$, unde poris super brachystochrona facile invenitur. Erit enim ut vis ad vim normalem N , ita dimidium radii osculi ad altitudinem M dobitum.

SCHOLION

hoc eadem proportio quoque locum habet in motu corporum protero; est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi scrimon autem in hoc consistit, ut in motu libero viros contri-

fuga et normalis sint inter se oppositae, pro curvis brachystochronis, sive in motu libero directiones radii osculi r et v coincidunt, in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. hic sumimus

$$r = \frac{ds^3}{dx dy},$$

cum in motu libero sit

$$r = \frac{-ds^3}{dx dy}.$$

COROLLARIUM 3

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem contineat $v = \frac{N r}{2}$, si hic valor ubique loco v in altera aequatione $dv =$ substituatur, habebitur aequatio naturam curvae brachystochronae.

COROLLARIUM 4

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque corpus potentiis eae curvae omnes erunt brachystochronae, in quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PROPOSITIO 77

PROBLEMA

679. In medio uniformi, quod resistit in ratione quacunque motus, et potentia absoluta existente uniformi et deorsum directa detegatur brachystochronam AM (Fig. 74, p. 321), super qua corpus descendit viximo ex A ad M perveniat.

SOLUTIO

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$ oique respondeat $PM = y$ arcuque curvae quaesitae $AM = s$ sit g potentia deorsum et $\frac{v^n}{k^n}$ resistantia in M , si quidem celeritas in M fuerit do-

erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga,

$$\frac{2v}{r} = \frac{2v dxddy}{ds^3}$$

to dx pro constante. Facta ergo aequatione est

$$v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}.$$

er canonica pro descensu in hoc medio resistente dat

$$dv = gdx + \frac{v^m ds}{k^m}.$$

in aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constantis abit

$$v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds^2}.$$

$$v = \frac{gdsdyddy}{dxdds} = \frac{gdsdy^2ds}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} \left\{ \frac{gds^2}{dx} + \frac{gdsdy^2ds}{2dxdds^2} \right\} = gdx + \frac{v^m ds}{k^m},$$

tion reducia dat

$$\frac{gdsdy^2ds}{2dxdds^2} = \frac{3gdy^2}{2dx} + \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^{m+1} ds^m}$$

$$dsd^3s = 3dds^2 + \frac{g^{m+1} ds^{m+1} dy^{2m+2}}{2^{m+1} k^m dx^{m+1} ds^{m+2}};$$

equatio exponit naturam curvae quaesitae. Quae aequat
ad constructionem praeparatur, pono $ds = p dx$, ut sit

$$dy = dx \sqrt{(p^2 - 1)},$$

$$dds = dp dx \quad \text{et} \quad d^2s = dx dp.$$

antis habebitur ista aequatio

$$p dp = 3dp^2 + \frac{g^{m+1} p^{m+1} dx^m (p^2 - 1)^{m+1}}{2^{m+1} k^m dp^{m+2}}.$$

Nunc sit porro $dx = qdp$; erit

$$ddx = 0 = dqdp + qddp \quad \text{seu} \quad ddp = -\frac{dpdq}{q}$$

oriaturque haec aequatio

$$-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1}p^{m+1}q^m dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}$$

seu

$$\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1}p^{m+1}dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}.$$

Multiplicetur haec aequatio, quo integrabilis fiat, per mp^{-3m-1}

$$-mp^{-3m}q^{-m-1}dq - 3mp^{-3m-1}q^{-m}dp = \frac{mg^{m-1}p^{-2m}dp (p^2 - 1)^{m-1}}{2^{m-1}k^m}$$

cuius integralis est

$$p^{-3m}q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}}.$$

Ponatur

$$\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1}k^m} \int \frac{(p^2 - 1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m};$$

erit P functio quaedam ipsius p et proinde dabitur, concessis salturibus. His igitur positis erit

$$p^3q = P \quad \text{atque} \quad q = \frac{P}{p^3}.$$

Quia vero est $dx = qdp$, erit

$$x = \int \frac{Pdp}{p^3} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{Pdp}{p^2} \quad \text{atque} \quad y = \int \frac{Pdp \sqrt{(p^2 - 1)}}{p^5}.$$

Unde constructio curvae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

680. Sit A punctum, in quo motus incipit atque celeritas erit ibi $v = 0$ seu

$$\frac{gdsdy^2}{2dxdds} = 0,$$

unde fit $dy = 0$, quia ds evanescere non potest. In puncto A erit haec tangens verticalis.

COROLLARIUM 2

1. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in medio non discrepat, curvae AM initium A a cycloidis cuspidē, quae est cycloides tochronea in vacuo, non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens normalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite parvus.

COROLLARIUM 3

2. Quia in A est $dy = 0$ atque est $dy = dx \sqrt{p^2 - 1}$, erit pro puncto A $dy = 0$. Ex data ergo curvae constructione punctum A obtinebitur, si $p = 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi, ut x , s et y evanescant, cum $p = 1$.

COROLLARIUM 4

3. Quoniam est

$$v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds},$$

propter $ds = p dx$ ob $dds = dp dx$

$$v = \frac{gpdx(p^2 - 1)}{2dp}$$

ob $dx = q dp$ erit

$$v = \frac{gpq(pp - 1)}{2} = \frac{gP(pp - 1)}{2p^2}.$$

ut v evanescere, si sit $p = 1$.

COROLLARIUM 5

4. Radius osculi in puncto quocunque M est

$$r = \frac{ds^3}{dxdds} = \frac{ds^2 dy}{dxdds}.$$

ob $ds = p dx$ erit radius osculi

$$r = \frac{p^3 dx \sqrt{p^2 - 1}}{dp} = p^2 q \sqrt{p^2 - 1} = \frac{P \sqrt{p^2 - 1}}{p}.$$

in puncto ergo A , ubi est $p = 1$, erit radius osculi $r = 0$.

COROLLARIUM 6

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est. erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B invenietur potest. Erit ergo in hoc puncto $r = \frac{gP}{2}$ et radius osculi $r = P$.

EXEMPLUM 1

686. Ponamus resistantiam evanescentem, ita ut motus liber erit $k = \infty$ ideoque habebitur

$$dsd^2s = 3dds^2 + C.$$

Quae aequatio divisa per $dsdds$ et integrata dat.

$$ldds = 3lds + C$$

seu

$$\frac{dds}{ds^2} = \frac{1}{a dx} + \frac{dx}{a dx^2}.$$

Haec aequatio denovo integrata dat.

$$-\frac{1}{2ds^2} = \frac{x}{a dx^2} + C.$$

Vel mutatis constantibus positoque $ds = p dx$ erit $\frac{1}{2p^2} = \frac{x}{a} + C$ quia posito $p = 1$ x debet evanescere, abit in hanc

$$x = \frac{a(pp-1)}{pp} \text{ seu } p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}} \text{ ideoque } ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}$$

quae est aequatio pro cycloide, ut constat.

EXEMPLUM 2

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum; erit

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{k} \int \frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}.$$

Unde fit

$$P = \frac{kp}{Ckp-1} = \frac{akp}{kp-a}.$$

am erit

$$x = \int \frac{akdp}{p^2(kp-a)} \quad \text{el} \quad s = \int \frac{akdp}{p(kp-a)}.$$

$$s = kl \frac{kp-a}{(k-a)p} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-ads}{(k-a)ds}$$

Porro ergo habebitur

$$(k-a)e^{\frac{s}{k}} ds = kds - ads,$$

ata dat

$$k(k-a)e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a).$$

ta quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit

$$ksds - axds - akds + akdx = 0.$$

ponentialom $e^{\frac{s}{k}}$ por seriem exprimere velimus, erit

$$-k(k-a) = k(k-a) \left(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1 \cdot 2k^2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k^3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^4} + \text{etc.} \right).$$

substituta dat

$$\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1 \cdot 2k} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k^2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^3} + \text{etc.}$$

puncto M est

$$v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}.$$

B vero, in que tangens est
s, erit

$$l \frac{k}{k-a} \quad \text{atque} \quad e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$$

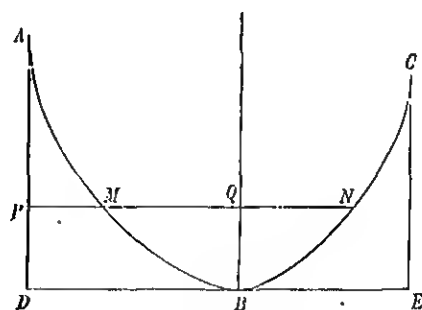


Fig. 77.

$$x = -k + \frac{kk}{a} l \frac{k}{k-a}.$$

nunc curva ultra B in BNC (Fig. 77); cuius natura ut inveniatur,

in axe BQ ponatur abscissa $BQ = t$ et arcus BN

$$AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a} l \frac{k}{k-a} \quad \text{et} \quad AMN$$

Erit ergo

$$e^{\frac{z}{k}} = \frac{k}{k-a} e^{\frac{z}{k}};$$

quibus valoribus in superiore aequatione substituti

$$k^2 e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at \quad \text{sen} \quad at = k^2 (e^{\frac{z}{k}} - 1)$$

Atque per seriem

$$at = \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^2} + \dots$$

pro curva BNC ; at pro ramo BMA , in quo erit arc

$$at = k^2 (e^{\frac{z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \dots$$

Curva vero BNC in C habebit quoque tangentem v
invenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc posito

$$a = k e^{\frac{z}{k}} - k \quad \text{seu} \quad z = kl \frac{a+k}{k} =$$

atque

$$t = CE = k - \frac{kk}{a} l \frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} - \dots$$

cum contra sit

$$AD = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} + \text{etc.}$$

Ex quo apparet punctum A esse altius positum qua
 A et C curvam habere cuspides seu puncta roversioni
 CE sint curvae diametri; id quod ex hoc intelligitur

$$y = \int \frac{P dp V(p^2 - 1)}{p^3},$$

ubi $V(p^2 - 1)$ valorem habet tam affirmativum quam

SCHOLIUM 1

88. Infra perspicietur hanc curvam brachystochronam congruere cum tautochrona in eadem resistantiae hypothesi. Haec vero inter motus chronos et brachystochronos interest differentia, ut ad tautochronismum idem corpus in ramo *CNB* descendere, in altero ascendere debeat, cum ratio pro brachystochronismo descensus per *AMB* fieri debeat. Interim haec utriusque curvae convenientia attentione digna videtur, cum et in eadem congruentia observatur.

EXEMPLUM 3

89. Resistat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita ut sit
Habebitur ergo pro curva quaesita ista aequatio

$$dsd^3s - 3dd^3s = \frac{gds^3dy^2}{2k^2dx^2},$$

construendam vero curvam

$$\frac{1}{p^3} = \frac{g}{k^2} \int \left(\frac{dp}{p^3} - \frac{dp}{p^4} \right);$$

erit

$$p^3 = \frac{k p \sqrt{3np}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$$

$$s = \int \frac{k dp \sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$$

$$x = \int \frac{k dp \sqrt{3n}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}} \quad \text{ac} \quad y = \int \frac{k dp \sqrt{3n(pp-1)}}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}.$$

ergo curvae constructio uti generalis habetur. Quia autem *n* numerum nunquam denotat, sit $n = \frac{1}{2}$; erit

$$y = \int \frac{k dp \sqrt{3}}{\sqrt{g(2p^4 - p)}} = \frac{2k \sqrt{3(2p-1)}}{\sqrt{gp}} - \frac{2k \sqrt{3}}{\sqrt{g}};$$

constantem ideo adieciimus, quo fiat $y = 0$ posito $p = 1$.¹⁾ Atque posito

¹⁾ Posito $n = \frac{1}{2}$ erit

$$y = \int \frac{k dp \sqrt{3(pp-1)}}{\sqrt{g(2p^4 - 3p^3 + p)}},$$

formula, quia $2p^4 - 3p^3 + p$ factorem $pp - 1$ non continet, reductionem ab EULERO factam mittit. Itaque etiam formulae sequentes locum non habent. P. St.

$$DB = \frac{2k(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{\sqrt{g}}$$

Fit autem

$$p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g - gy^2}}$$

atque

$$\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^2y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - gy^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g - gy^2}}$$

Ex quo oritur

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{12k^2 dy - 4ky dy \sqrt{3g - gy^2} dy}{\sqrt{(96k^2y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - gy^4)}} \\ &= \int \frac{12k^2 dy - 4ky dy \sqrt{3g - gy^2} dy}{\sqrt{(gy^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g - gy^2})}}, \end{aligned}$$

quae est aequatio iuter coordinatas x et y pro curva quaesita

SCHOLION 2

690. In medio, quod in simplici coloritatum ratione resistentiam simplicius determinare non licet, quam statim ex constructione consequitur. Quamobrem hunc resistentiae casum sumus prosecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes pertinet, in quibus curva quaeritur, super qua corpus descendendo datam lineam, sive rectam sive curvam, perveniat, ea similiter in eodem medio solvuntur quo pro vacuo. Cum scilicet ex eadem innumerabiles egrediantur curvae brachystochronae, ex iis quae datae lineae, sive rectae sive curvae, ad angulos rectos hac enim corpus ad istam lineam brevissimo tempore pervenit, inde est demonstratum. Simili ratione curva, quae omnes ad angulos rectos traiecit, ab omnibus arcibus abscindet quos corpus descendens aequalibus temporibus absolvit. Eodem se habent modo, quaecumque fuerit resistentia et quaecumque absolutae. Problema autem brachystochronarum generalis evolvemus.

PROPOSITIO 78

PROBLEMA

In medio resistente quocunque et potentiis sollicitantibus quibuscunque curvam brachystochronam AM (Fig. 78), super qua corpus descendens ex citissime perveniat.

SOLUTIO

A motus initium, per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondent applicata $PM = y$ $AM = s$. Sit porro corporis in M debita altitudini v et resistentia ut-
 celeritate pondens $= R$. Quaecunque
 pus sollicitent potentiae absolutae,
 eo duae potentiae substitui possunt
 directionibus ML et MN , quarum
 AP sit parallela, haec vero ad illum
 Vis autem corpus secundum ML
 sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$.
 tribus oritur

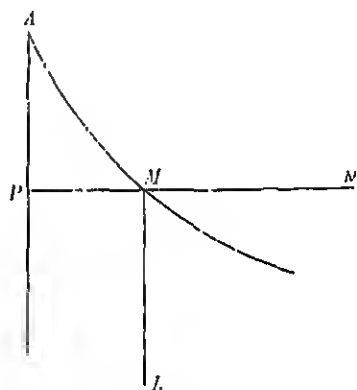


Fig. 78.

$$dv = Pdx + Qdy - Rds.$$

tura brachystochronismi dat

$$\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$$

enotante r radium osculi curvae in M versus superiora directum;
 ergo sumte dx constante ponimus $\frac{+ds^2}{dxddy}$, cum alias deberet esse
 $\frac{ds^2}{dxddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus

$$dv = Pdx + Qdy - Rds \quad \text{et} \quad \frac{2vdxddy}{ds^3} = Pdy - Qdx$$

etur v , habebitur aequatio pro curva brachystochrona quaesita; est

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy};$$

erentiale loco dv atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit
 em pro curva quaesita. Q. E. I.

692. Aequatio pro curva, si dicto modo v eliminetur, fit tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque adiacere poterunt, quibus effici potest, ut evanescente x simul quoque y evanescaut atque praeterea curva per datum punctum M tra-

COROLLARIUM 2

693. Quia igitur semper curva brachystochrona potest exhibitum habeat in A et per datum punctum transeat, infinitae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

COROLLARIUM 3

694. Inventa aequatione pro curva brachystochrona AM in corporis super ea descendantis celeritas in singulis punctis; erit

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxddy}.$$

COROLLARIUM 4

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo AM absolvit; erit scilicet tempus per AM

$$= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{2} dxddy}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}};$$

quod propter aequationem inter x et y iam inventam potest quadraturas exhiberi.

COROLLARIUM 5

696. Si igitur curva esset invenienda, quae omnes brachystochronae A eductas ad angulos rectos traicere deberet, tum ois linea haberetur, si ab omnibus abscinderetur

$$\int \frac{\sqrt{2} dxddy}{\sqrt{(Pdy - Qdx)}}$$

eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab istis curvis infinitis arcus isoperimetrici abscinduntur, qui, quoniam omnes curvae sunt brachystochronae, terminabuntur ad trajectoriam orthogonalem.

EXEMPLUM

697. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis atque exponente resistentiae nuncque variabilis q ; erit $R = \frac{v^2}{q}$. Cum ergo sit

$$dv = Pdx + Qdy - \frac{vds}{q},$$

erit integrando

$$e^{\int \frac{ds}{q}} v = \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy).$$

Si autem sit

$$v = \frac{Pdyds^2 - Qdxds^2}{2dxdy},$$

erit

$$2dxdy \int e^{\int \frac{ds}{q}} (Pdx + Qdy) = e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2 (Pdy - Qdx),$$

in qua aequatione non amplius inest v . Interim tamen haec aequatio differentialis tertii gradus, si differentiatione signa integralia tollantur; determinati praeterea ipsarum P , Q et q valores in causa sunt, quo minor aequatio ad constructionem praeparari queat.

SCHOLION

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curvas brachystochronae sunt deducta, latissimo patent, quia, quocumque potentiae corpus sollicitaverint, eas omnes in huiusmodi duas possunt resolvi, si modo omnino in eandem directionem in eodem plano fuerint positae. Quamobrem in hac quoque positione continentur brachystochronae pro quacumque virium centripetarum hypothosi, quas autem, quia neque continuas neque construibiles aequationes proveniunt, ulterius non persequimur. Missis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praescribitur, progredimur ad sequentes quaestiones, in quibus curvae requiruntur, quae a corpore super iis moto datam sustineant positionem.

PROPOSITIO 79

PROBLEMA

699. In hypothesis gravitatis uniformis et medio quacunq̃ celeritatum resistit, determinare curram nequabilem a corpore super ea descendente ubique eandem sustineat.

SOLUTIO

Positis $AP = x$, $PM = -y$, $AM = s$ et celeritatem $= v$ sit potentia corpus deorsum secundum ML trahit in $M = \frac{v''}{k''}$. Erit elementum Mm progreditur

$$dv = gdx$$

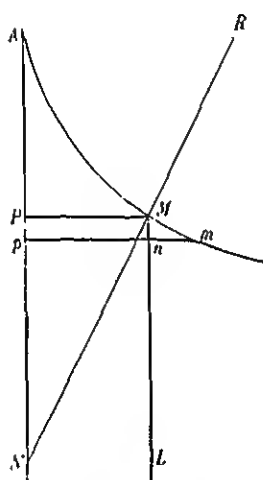


Fig. 79.

Ponamus curvam deorsum MR sit radii osculi directio $ML = \frac{ds^2}{dx dy}$ posito dx celeritatis est $= \frac{2v dx dy}{ds^2}$. Sectionem curva promittit a potentiae $ML = g$ orta, quavis, qua curva secundum

$$= \frac{g dy}{ds} + \frac{2v}{ds}$$

quae cum debeat esse constans, ponatur ea aequalis

$$agds^3 = g dy ds^3 + 2v dx dy$$

atque hinc

$$v = \frac{agds^3 - g dy ds^3}{2 dx dy}$$

Sit $ds = p dx$ atque $dy = dx \sqrt{p^2 - 1}$; orit

$$ddy = \frac{p dp dx}{\sqrt{p^2 - 1}}$$

substitutis erit

$$= \frac{(\alpha g p^3 dx - g p^3 dx \sqrt{(p^2 - 1)}) \sqrt{(p^2 - 1)}}{2 p dp} = \frac{\alpha g p^3 dx \sqrt{(p^2 - 1)} - g p dx (p^2 - 1)}{2 dp}.$$

porro $dx = 2 q dp$; erit

$$v = g p q (\alpha p \sqrt{(p^2 - 1)} - p^2 + 1)$$

$$v = P q$$

$$g p (\alpha p \sqrt{(p^2 - 1)} - p^2 + 1) = P.$$

ergo

$$dv = P dq + q dP \quad \text{et} \quad v^m = P^m q^m.$$

his valoribus in aequatione $dv = g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ substitutis prodibit

$$P dq + q dP = g dx - \frac{P^m q^m ds}{k^m}.$$

porro

$$dx = 2 q dp \quad \text{et} \quad ds = p dx = 2 p q dp.$$

obrem proveniunt ista aequatio

$$P dq + q dP = 2 g q dp - \frac{2 P^m q^{m+1} p dp}{k^m},$$

duas tantum continet variables p et q , quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur

$$q = \frac{1}{P u^{\frac{1}{m}}};$$

facto obtinobitur ista aequatio

$$du + \frac{2 m g u dp}{P} = \frac{2 m p dp}{k^m P};$$

ducta in $e^{\frac{2 m g}{P} \int \frac{dp}{P}}$ et integrata abit in hanc

$$u = \frac{2 m e^{-\frac{2 m g}{P} \int \frac{dp}{P}}}{k^m} \int \frac{e^{\frac{2 m g}{P} \int \frac{dp}{P}} p dp}{P}.$$

Hinc ergo invenitur u per p , atque u invento erit $q = \frac{1}{p^{\alpha m}}$, atque

$$x = \int \frac{p^2 dp}{p^{\alpha m}} \quad \text{et} \quad s = \int \frac{p^2 p dp}{p^{\alpha m}} \quad \text{et} \quad y = \int \frac{p^2 dp}{p^{\alpha m} \sqrt{p^2 - 1}}.$$

Cum autem sit

$$P = gp(\alpha p \sqrt{p^2 - 1} \cdots p^2 + 1),$$

erit

$$\frac{g dp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha \sqrt{p^2 - 1}} + \frac{(1 - \alpha^2) dp}{\alpha^2 p - \alpha \sqrt{p^2 - 1}}$$

atque

$$\int \frac{g dp}{P} = lp - l(\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})$$

et

$$e^{2mg \int \frac{dp}{P}} = p^{2m}(\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-2m}.$$

Est vero

$$\int e^{2mg \int \frac{dp}{P}} p^2 dp = e^{2mg \int \frac{dp}{P}} p - \frac{1}{2mg} \int e^{2mg \int \frac{dp}{P}} dp.$$

Quocirca erit

$$u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{-2mg \int \frac{dp}{P}}}{gk^m} \int e^{2mg \int \frac{dp}{P}} dp = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-2m}}{gk^m p^{2m}(\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-2m}}.$$

Cum igitur hoc modo ex p inveniri possit u , curvae quaesitae hinc perficietur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

700. Curva inventa ergo hanc habebit proprietatem, ut in qua M prematur versus MN vi constanti, quae est ad vim gravitatis α ad 1.

1) Editio princeps:

$$\int \frac{g dp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha} l(p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{(\alpha + 1)}{2\alpha} l \frac{\alpha p - \sqrt{p^2 - 1}}{p - \sqrt{p^2 - 1}}$$

et

$$e^{2mg \int \frac{dp}{P}} = p^{2m} (p - \sqrt{p^2 - 1})^{\frac{m(\alpha - 1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-\frac{m(\alpha + 1)}{\alpha}}.$$

Corre

2) Editio princeps:

$$\frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m} (p - \sqrt{p^2 - 1})^{\frac{m(\alpha - 1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-\frac{m(\alpha + 1)}{\alpha}} dp}{gk^m p^{2m} (p - \sqrt{p^2 - 1})^{\frac{m(\alpha - 1)}{\alpha}} (\alpha p - \sqrt{p^2 - 1})^{-\frac{m(\alpha + 1)}{\alpha}}}$$

Corre

COROLLARIUM 2

Si sumatur numerus negativus, curva ubique secundum MR , et oppositam, aequaliter premitur. Hoc ergo casu curva convexa deorsum, quia vis centrifuga contraria atque maior esse normalis, cuius directio semper in MN est sita.

COROLLARIUM 3

Si, tunc curva prohibet, quae nullam omnino pressionem a se recipiat. Quae ergo curva est ex ipsa, quum corpus projectum cadat.

COROLLARIUM 4

Si casu tota pressio $= g$, tunc curva erit convexa deorsum una vis normalis solum ubique est minor quam g nisi enim vis centrifuga cum ea conspuare debet ideoque radius osculi MN oppositam cadere.

COROLLARIUM 5

ad huc

$$h^2 \left(r^2 + t^2 \right)^{\frac{1}{2}} u = 2mz,$$

$$d = \left(r^2 + t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{p} dp,$$

substitutio, quia in hac aequatione indeterminatae sunt a se invicem, habebatur, si ponatur $P^2 = 0$. Hinc autem fit

$$qp + p^2 - p^2 - Y = p^2 + Y = 0$$

$$qp = 1 - p^2 - Y \text{ sive } uds = dy,$$

$$us = y,$$

recta ascendens cum verticali MP constituens, cuius sinus est sine toto. Hoc enim casu vis centrifuga evanescit et vis g .

EXEMPLUM

705. Sit $\alpha = 1$ seu quaeratur curva, quae ubique vi
casu integratio ipsius $\frac{qdp}{p}$ simplicior evadit; erit enim

$$e^{\alpha m \int \frac{dp}{p}} = p^{2m} (p - \sqrt{p^2 - 1})^{-2m} = \left(\frac{p}{p - \sqrt{p^2 - 1}} \right)^{2m} = (p^2 + 1 + 2p\sqrt{p^2 - 1})^m$$

Hanc ob rem erit

$$u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int (p^2 + p\sqrt{p^2 - 1})^{2m} dp}{gk^m (p^2 + p\sqrt{p^2 - 1})^{2m}}$$

Quae aequatio, quoties $2m$ est numerus integer, integration
sito enim

$$p^2 + p\sqrt{p^2 - 1} = \frac{r+1}{2}$$

erit

$$p = \frac{r+1}{2\sqrt{r}}$$

atque

$$u = \frac{r+1}{2gk^m\sqrt{r}} - \frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}} \int \frac{(r+1)(r+1)^{2m} dr}{r\sqrt{r}}$$

Est autem hac positione

$$r = 2p^2 - 1 + 2p\sqrt{p^2 - 1} \quad \text{seu} \quad \sqrt{r} = p + \sqrt{p^2 - 1}$$

Ut si fuerit $m = \frac{1}{2}$ seu resistantia coloritibus proportionem

$$u = \frac{r+1}{2g\sqrt{k}r} - \frac{1}{4g(r+1)\sqrt{k}} \int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}} \left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+1}{3(r+1)\sqrt{r}} + \beta \right)$$

seu mutata constanta β est

$$u = \frac{r\sqrt{r} + 3\sqrt{r} + 2\beta}{3g(r+1)\sqrt{k}}$$

Posito autem loco r eius valore erit

$$u = \frac{p^2+1+p\sqrt{p^2-1}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{\beta}{3g(p^2+p\sqrt{p^2-1})\sqrt{k}}$$

$\beta = 0$; erit.

$$u^1 = u^2 = \frac{(p^2 + 1 + p\sqrt{p^2 - 1})^2}{9g^2kp^2}$$

propter

$$P = gp(p - \sqrt{p^2 - 1})\sqrt{p^2 - 1}$$

ne

$$Pu^1 = (p - \sqrt{p^2 - 1})(p^2 + 1 + p\sqrt{p^2 - 1})^2 \sqrt{p^2 - 1} \\ 9gkp$$

$$x = \frac{2gk}{3p^2 - 1 - 3p\sqrt{p^2 - 1}} - 2gkl(3p^2 - 1 - 3p\sqrt{p^2 - 1}).$$

SCHOLIUM

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit $\alpha = -1$, quo casu prodit curva concava deorsum, in qua vis centrifuga est et maior quam vis normalis; quippe excessus est $= g$. Eadem α prodit aequatio, quae pro casu $\alpha = 1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{p^2 - 1}$ est immutari.

Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus pressionum leges proponuntur, eas vel ad nimis prolixos calculos sunt vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curvas, in quibus pressio sit duplo maior quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, et chystochronas, atque curvas, in quibus alia obtinet ratio, supra quibus pertractavimus, cum curvas investigaremus, super quibus motus quilibet accelleraretur. Sequitur ergo, ut ad curvas inveniendas progrediamur per quibus plures diversi descensus vel ascensus datas inter se tenent, quae quaestiones plurimum difficultatis in se habent. Necesse est ad huiusmodi problemata solvenda, ut celeritas corporis in singulis locis sit exprimi per quantitates, quibus curvae natura determinatur. Cum enim non in quavis resistantiae hypothesi possit perfici, uti scripsimus, tales quaestiones tantum pro specialibus resistantiae hypothesibus erant proponi. Praecipue ergo ista tractatio ad resistantiam quadraticam proportionalem est accommodanda, quia hoc casu aequatio celeritatis, qua celeritas determinatur, separationem variabilium admittit a qua celeritas potest exhiberi. Tum etiam considerari potest resistantia, in qua quadratis celeritatum est proportionalis, cum pro hac hypothesi celeritas admodum cognoscatur. Denique quaecumque fuerit resistantiae lex

modo resistentia est valde parva, huiusmodi quæstiones dent. In his vero problematibus vel ratio celeritatum, scensibus super eadem curva acquiruntur, investigatur vel diversi descensus aut ascensus absolvuntur, ratio. Atque ex data vel temporum vel celeritatum variis descensibus ipsae curvae sunt inveniendae.

PROPOSITIO 80

PROBLEMA

707. In medio uniformi, quod resistit in duplicata ratione potentia absoluta deorsum tendente comparare inter se celeritates (Fig. 80), quae in diversis descensibus corporis super curvam

SOLUTIO

Sit celeritas in A , quam nullo descensu acquisivit, v . Sit celeritas in M debita altitudini v . Ponantur $AP = x$, $AM = y$. Sit P celeritas in M , quae sit utcumque P , et v utcumque v , atque exponens resistentiae k .

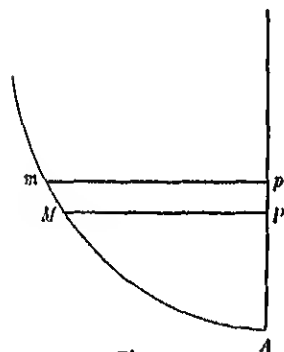


Fig. 80.

$$dv = -Pdx \quad (1)$$

quae aequatio integrata dat

$$v = e^{\frac{x}{k}} (b - \int e^{-\frac{x}{k}} P dx)$$

integrali $\int e^{-\frac{x}{k}} P dx$ ita accepto, $x = 0$. Sit nunc M initium descensus, ubi est $v = 0$; invenietur b ex aequatione

$$b = \int e^{-\frac{x}{k}} P dx.$$

Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m acquisita sit debita altitudini $b + db$. Erit ergo

$$b + db = \int e^{-\frac{x}{k}} P dx$$

summa omnium $e^{\frac{-s}{4}} P dx$ ab A usque ad m ; in aequatione vero priore significat summam omnium $e^{\frac{-s}{4}} P dx$ ab A usque ad M tantum. Illa summa superat hanc summam ultimo elemento $e^{\frac{-s}{4}} P dx$ existente $AM = s dx$. Erit ergo

$$db = e^{\frac{-s}{4}} P dx.$$

aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q. E. J.

COROLLARIUM 1

Dato ergo arcu descensus $AM = s$ erit altitudo celeritati in A debita

$$b = \int e^{\frac{-s}{4}} P dx.$$

punctum M et celeritas in A tanquam variables quantitates considerit aequatio inter eas

$$db = e^{\frac{-s}{4}} P dx.$$

COROLLARIUM 2

Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter descensus et celeritates in puncto A acquisitas, inuenietur aequatio pro M propositae conditioni satisfaciens.

COROLLARIUM 3

Si medium non fuerit uniforme, sed difforme utcumque existente onente $= g$, loco aequationis inventae prodibit ista aequatio

$$db = e^{-\int \frac{ds}{g}} P dx,$$

quod similis est sensus.

COROLLARIUM 4

711. Quia valor ipsius e est unitate maior, quippe 2,71828
 $e^{-\int \frac{dx}{x}}$ seu $e^{\frac{-x}{k}}$ unitate minor et hanc ob rem $db < Pdx$. In vacuo
 $db = Pdx$.

SCHOLION 1

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus cele-
 stium b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim or-

$$db = e^{\frac{x}{k}} Pdx$$

vel in medio difforni

$$db = e^{\int \frac{dx}{x}} Pdx.$$

Quae formulae ex illis descensui inservientibus invenientur ponendo
 $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur
 apparet, quemadmodum pro descensu semper erat $db < Pdx$, in
 ascensu semper $db > Pdx$, quia $e^{\frac{x}{k}}$ seu $e^{\int \frac{dx}{x}}$ est unitate maior.

COROLLARIUM 5

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro
 descensu esse potest $b = \int Pdx$ vel $b = a \int Pdx$; tum enim foret $e^{\frac{x}{k}} = a$ seu
 in qua aequatione nulla linea continetur.

COROLLARIUM 6

714. Neque etiam curva poterit inveniri, pro qua vel in descensu
 in ascensu foret $b = \int Qdx$ denotante Q functionem quancunque
 et x , nisi Q ita sit comparata, ut $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$.
 $e^{\pm \int \frac{dx}{x}} P = Q$ et $e^{\pm \int \frac{dx}{x}}$ abit in 1posito $s = 0$.

SCHOLIUM 2

Ratio huius est, quod posuimus s evanescere evanescente x ; atque rem aequatio

$$db = e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} P dx$$

integrari, ut evanescat b posito $x=0$. Si autem b ita detur, ut db exprimatur, aequatio per dx dividi poterit. Quocirca ea ad hanc non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate careat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, ut esset $db = R ds$ $R ds$ evanescente b facto $s=0$, tunc aequatio pro curva quaesita erit

$$R ds = e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} P dx,$$

aper est pro curva reali, dummodo $\int R ds$ habeat valorem affirmativum etque $ds > dx$ seu

$$e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} P > R.$$

EXEMPLUM 1

Sit potentia sollicitans uniformis seu $P=g$ et medium resistens requiraturque curva MA hanc habens proprietatem, ut corpus in descensibus ad A usque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata arcuum descensu percursorum. Erit ergo \sqrt{b} ut \sqrt{s} seu $b = \alpha s$;

$$\alpha ds = g e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} dx \quad \text{seu} \quad \alpha e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} ds = g dx,$$

integralis est

$$\alpha k (e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} - 1) = gx$$

instante, quo fiat $x=0$ evanescente s . Habetur ergo

$$e^{\frac{1}{2}f \frac{ds}{dx}} = \frac{\alpha k + gx}{\alpha k} \quad \text{atque} \quad \frac{s}{k} = l(\alpha k + gx) - l\alpha k.$$

differentiata dat

$$\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k + gx},$$

horizontali a puncto A deorsum

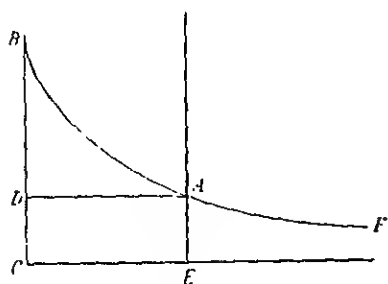


Fig. 81.

ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha = g$, punctum eaderet adeoque non nisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha = 0$, punctum infinite distaret et corpus descendens omnem amitteret celeritatem igitur debeat esse $\alpha < g$, erit $b < gs$.

EXEMPLUM 2

717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitanti quaeratur curva AMF (Fig. 82), super qua omnes ascensus ex puncto A ita se habeant, ut toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratum initialem in A proportionales. Erit ergo ut aucto b $db = \alpha ds$. Cum autem pro ascensibus sit $db = g e^k dx$, erit

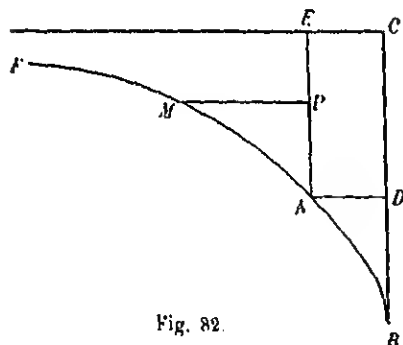


Fig. 82.

$$\alpha e^k ds = g dx$$

atque integrando

$$\alpha k (1 - e^k) = g x.$$

Hinc igitur habetur

$$e^k = \frac{\alpha k - g x}{\alpha k}$$

atque

$$\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k - g x} \quad \text{seu} \quad \left(\frac{\alpha k}{g} - x \right) \frac{ds}{dx} = k.$$

Ex quo apparet curvam satisfaciendam esse iterum tractoriam

horizontali CE filo longitudinis k constructam, sed deorsum spectante
 cuspidis sit in B existente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{\alpha k}{g}$; ductaq;
 horizontali DA erit A punctum, in quo ascensus omnes incipere debe
 inc ergo quoque intelligitur α non posse esse maius quam g , quia ali
 mectum A foret imaginarium. At si fuerit $\alpha = g$ seu $b = gs$, incidet A
 eritque arcus quolibet ascensu percursus $= \frac{b}{g}$.

SCHOLIUM 3

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex universali formu
 inventa resolvi possunt, hic praefermitto; neque etiam huiusmodi quaestio
 ro aliis resistentiae hypothesebus, quibus solutio earum inveniri que
 offero, quoniam tales quaestiones neque iam sunt agitatae neque satis su
 riosae, ut earum solutiones requirantur. Ad digniora igitur progred
 roblemata, in quibus curvae quaeruntur tautochroneae, super quibus om
 el ascensus vel descensus aequalibus absolvantur temporibus.

PROPOSITIO 81

PROBLEMA

719. *In hypothesisi potentiae uniformis deorsum directae et medio unifor
 uod resistit in duplicata ratione celeritatum, invenire curvam tautochronam*
 (Fig. 80, p. 352), *super qua omnes descensus ad punctum A usque absolvan*
equalibus temporibus.

SOLUTIO

Consideretur quicumque descensus, in quo celeritas, quam corpus
 puncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b . Ponantur $AP = x$, $AM =$
 altitudo celeritati in M debita $= v$ atque potentia sollicitans $= g$ et me
 xponens $= k$, ita ut resistentia in M sit ad vim gravitatis ut $\frac{v}{k}$ ad
 ilis positis erit

$$dv = -gdx + \frac{vds}{k};$$

quae aequatio integrata dat

$$v = c^2 \left(b - \int e^{-\frac{v}{k}} g dx \right)$$

integrali $\int e^{\frac{-s}{c^2 k}} g dx$ ita sumto, ut evanescat posito x vel $s =$
aequatione initium descensus invenitur ponendo $v = 0$ sen

$$\int e^{\frac{-s}{c^2 k}} g dx = b.$$

Tempus vero, quo arcus MD absolvitur, hinc erit

$$= \int_0^b \frac{ds}{c^2 k \sqrt{(b - \int_0^s e^{\frac{-s}{c^2 k}} g dx)}}$$

ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integrationem

$$\int e^{\frac{-s}{c^2 k}} g dx = b.$$

Ponamus brevitatatis gratia

$$\int e^{\frac{-s}{c^2 k}} g dx = t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{c^2 k} = du,$$

ita ut sit tempus totius descensus

$$= \int_0^b \frac{du}{\sqrt{(b - t)}}$$

posito post integrationem $t = b$. Quo nunc haec expressio
obtineat valorem, debet

$$\int \frac{du}{\sqrt{(b - t)}}$$

esse functio nullius dimensionis ipsarum b et t , ut posito $t = b$
 b evanescat. Hanc ob rem du debet esse functio dimidia d
 t tantum, quia u a b pendere non potest. Fieri ergo necesse

$$du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$$

existente α quantitate constante b non continente. Hoc po
unius descensus

$$= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt - t^2)}}$$

posito post integrationem $t = b$. Vel posita ratione diametri

compus unius descensus $= \alpha x$; qui valor perpetuo idem manet, atque b seu descensus initium nuncietur. Curva ergo tautochrone terminabitur ex hac aequatione

$$du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{2k}},$$

quod est

$$2\alpha \sqrt{t} = 2k(1 - e^{2k}) \quad \text{scilicet} \quad t = \frac{k^2}{\alpha^2}(1 - e^{2k})^2$$

vel constante, quae faciat t evanescere posito $s = 0$. Cum autem sit

$$t = \int e^{2k} g dx,$$

$$dt = e^{2k} g dx = \frac{k}{\alpha^2}(1 - e^{2k})e^{2k} ds,$$

$$\alpha^2 g = a \quad \text{scilicet} \quad \alpha = \int \frac{a}{g};$$

$$u dx = k(e^{2k} - 1) ds,$$

quod est

$$\alpha x = 2k^2(e^{2k} - 1) = ks;$$

haec aequationes, quia variables s et x a se invicem sunt separatae, construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus oritur, quia ex altera aequatione est

$$k(e^{2k} - 1) = \frac{\alpha x + ks}{2k},$$

quod in altera substituto

$$\alpha x ds + ks ds = 2ak dx.$$

COROLLARIUM 1

720. Quia est $a = \sqrt{\frac{a}{g}}$, erit tempus unius descensus =
autem et gravitate = 1 est tempus descensus penduli f
$$= \frac{\pi \sqrt{2} f}{2}$$

(§ 166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est =

COROLLARIUM 2

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g} = 3166$ part. millesimarum pe-
descensus absolvetur dimidio minuto secundo; hoc ergo eveni-
scrup. pedis Rhen.

COROLLARIUM 3

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est

$$= e^{\frac{1}{k}} \left(b - \int e^{\frac{1}{k}} g dx \right) = e^{\frac{1}{k}} (b - t)$$

atque ob

$$t = \frac{g k^2 \left(1 - e^{\frac{1}{2k}} \right)^2}{a}$$

erit

$$v = e^{\frac{1}{k}} \left(b - \frac{g k^2}{a} \left(1 - e^{\frac{1}{2k}} \right)^2 \right) = a b e^{\frac{1}{k}} - \frac{g k^2}{a} \left(e^{\frac{1}{2k}} - 1 \right)^2$$

COROLLARIUM 4

723. Posito $v = 0$ prodibit totus arcus descensus ex 1

$$ab = \frac{g k^2}{a} \left(1 - e^{\frac{1}{2k}} \right)^2.$$

Si ergo arcus descensus ponatur = f , erit

$$ab = \frac{g k^2}{a} \left(1 - e^{\frac{f}{2k}} \right)^2.$$

Quare dato arcu descensus f erit

$$v = \frac{g k^2 e^{\frac{1}{k}}}{a} \left(\left(1 - e^{\frac{f}{2k}} \right)^2 - \left(1 - e^{\frac{1}{2k}} \right)^2 \right)$$

COROLLARIUM 5

Aequatio pro curva haec

$$ax = 2k^2(e^{2t} - 1) - ks$$

in exponentiali e^{2t} convertendo, quae est

$$1 + \frac{s}{2k} + \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8k^3} + \text{etc.},$$

hanc

$$ax = \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8k^2} + \text{etc.}$$

$$2ax = \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

SCHOLIUM 1

Notari hic convenit hanc curvam simili aequatione exprimi, quae brachystochrona ascensui inserviens exprimebatur; ibi enim erat

$$at = \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4k^2} + \text{etc.}$$

quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inventa in hoc tantum modo hic sit $2a$, quod ibi erat a , atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curva brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accommodari seu ascensus descensus tributo in medio resistente, cuius exponens est minor.

COROLLARIUM 6

Ad inveniendam continuationem curvae MA ultra A poni debet semper s , quo facto habebitur

$$ax = 2k^2(e^{-2t} - 1) + ks$$

$$2ax = \frac{s^2}{1 \cdot 2} - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4k^2} - \text{etc.}$$

Quae eadem aequatio prodisset, si k negativum fecissemus. negativo descensus mutatur in ascensum; quocirca curva ML in arcam ascensui inserviet atque super ea omnes ascensus eodem tempore, scilicet $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIUM 7

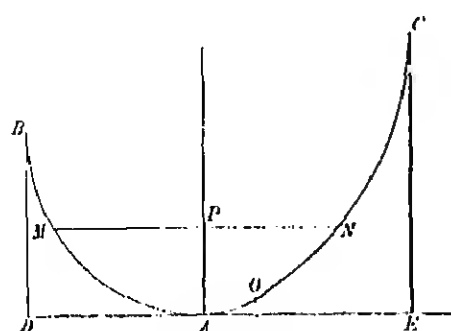


Fig. 88

727. Eadem ergo $BMANC$ (Fig. 83) erit curva pro descensu quam pro ascensu, quocirca super arcam BMA omnes descensus eodem tempore absolvantur atque super ANC omnes ascensus. Quare oscillationes, quae in arcam BMA erunt inter se isochronae erunt etiam cum unius semioscillationis or-

COROLLARIUM 8

728. Si resistentia evanescit, quo casu k fit ∞ , curva latus abire debet, quae est curva tautochronea in vacuo. Hoc ipsum series expressa indicat; fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ seu $4ax = s^2$, aequa-

COROLLARIUM 9

729. Curva ergo $BMANC$ prout cyclois habebit cuspidem B et C , ad quas inveniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro B

$$a = k(a^{2k} - 1) \quad \text{sin} \quad s = 2kl \frac{a + k}{k} = AMB;$$

atque eius altitudo BD erit

$$= 2k + \frac{2k^2}{a} l \frac{a + k}{k}.$$

Pro arcu ascensus vero ANC erit

$$ANC = 2kl \frac{k}{k - a} \quad \text{el} \quad CE = \frac{2k^2}{a} l \frac{k}{k - a} - 2k.$$

er series erit

$$BD = a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

$$CE = a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 10

30. Ex his perspicitur cuspidem *C* arcus ascensus elevationem esse
A arcus descensus. Atque arcus *ANC* cuspis in infinitum abit, si
 et si $a > k$, cuspis *C* erit imaginaria. Coterum ex aequatione patet
BD quam *CE* esse diametros curvae inventae.

COROLLARIUM 11

31. Si corpus in dimidia oscillatione habuerit celeritatem altitudini *b*
 in, erit arcus descensus

$$= 2kl \frac{k\sqrt{g}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$$

seu per seriem

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

sequens arcus ascensus

$$= 2kl \frac{k\sqrt{g} + \sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2g} + \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} + \text{etc.}$$

COROLLARIUM 12

32. Si ergo descensus fiat ex puncto *B*, ita ut arcus descensus sit

$$= AMB = 2kl \frac{a+k}{k},$$

$$b = \frac{gak^2}{(a+k)^2};$$

antis vero ascensus arcus erit

$$= 2kl \frac{2a+k}{a+k}.$$

COROLLARIUM 13

733. Ex aequatione pro hac curva apparebit curvam infinitam esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds osculi in M sit

$$= \frac{dsdy}{ddx} = \frac{ds\sqrt{(ds^2 - dx^2)}}{ddx},$$

quia est [§ 719]

$$dx = \frac{k}{a} (e^{2k} - 1) ds,$$

erit

$$ddx = \frac{1}{2a} \cdot e^{2k} ds^2$$

et

$$\sqrt{(ds^2 - dx^2)} = ds \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{a^2} (e^{2k} - 1)^2\right)};$$

erit radius osculi in M

$$= \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{a^2} (e^{2k} - 1)^2\right)}}{e^{2k}}.$$

Posito ergo $s = 0$ erit radius osculi in puncto infimo A et C radius osculi evanescit.

COROLLARIUM 14

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo methodum maximorum maximus invenitur in arcu ascentu puncto O existente

$$AO = 2kl \frac{k^2}{k^2 - a^2}.$$

In hoc enim puncto est radius osculi

$$= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2 - a^2)}}.$$

Ex quo concluditur, nisi sit $k > a$, curvaturam curvae diminui neque punctum O usquam existere.

SCHIOLION 2

hoc igitur problemate duas invenimus curvas, super quarum altera ascensus, super altera vero omnes ascensus aequalibus absolvuntur temporeque cum super tota curva BAC omnes itus seu semioscillationes peragantur temporibus, si quidem in curvae portione BA incipit curva ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, alius quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. in fluidis praeter resistantiam quadratis celeritatum proportio- insuper observatur, quam momentis temporum proportionali- tem esse probabile est, otiam continuam cum ista resistantia m determinare operae pretium est; quod vero facile ex praeco- potest. Sit enim resistantia constans $= h$; erit pro descensu

$$dv = -gdx + hds + \frac{vds}{k}.$$

in prior operatione tantum loco gdx ubique $gdx - hds$ substitua- remus satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet a curva

$$ax = \left(\frac{ah}{g} - k\right)s + 2k^2(e^{\frac{s}{k}} - 1)$$

ascensu vero haec

$$ax = \left(k - \frac{ah}{g}\right)s + 2k^2(e^{-\frac{s}{k}} - 1);$$

quoque cum prior eandem curvam continuam constituit; abit in alteram ponendo s negativum. Notandum hic est, si fuerit a curvam tautochronam tractoriam BAF (Fig. 82, p. 356) asymptotam horizontalem CE , quae a puncto A distat intervallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. longitudo, quo haec tractoria describitur, est $= 2k$.

autem super huiusmodi curva tangentem horizontalem nusquam semioscillatio absolvi possit atque alicubi punctum aequilibrum A rum non est, cum, ut supra iam observavimus, in tali resistantia corpus in loco subsistere queat declivi. His autem casibus, quibus A descendere pergit, nulli reditus atque ideo nullae oscillationes unt, quia corpus, quanquam super plano declivi ad quietem per- st, tamen super eo ascendere nequit; in quovis enim curvae F puncto corpus in quiete perseverare potest.

SCHOLIUM 3

736. Non multo difficilior fit problematis solutio, si potentia tendens non constans, sed variabilis utcumque P atque exponens etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento t descendu

$$\frac{ds}{c^2 \int e^{\int P dx}} V \left(b - \int e^{\int P dx} \right)$$

Si nunc ut ante [§ 719] ponatur

$$\int e^{\int P dx} = t \quad \text{et} \quad \frac{ds}{c^2 \int e^{\int P dx}} = du,$$

debebit quoque esse

$$du = \frac{adt}{\sqrt{t}} \quad \text{scilicet} \quad t = \frac{a^2 dt^2}{du^2} = \frac{a^2 P^2 dx^2}{e^{\int P dx} ds^2}.$$

Quae aequatio denuo differentiatu posito ds constante et loco dt substituto dabit

$$\frac{q ds^2}{2a^2} = Pq ddx + qdPdx - \frac{1}{2} P^2 dx ds^2$$

pro curva descensus isochronos habente. Huinsque curvae contrariis ascensibus inserviet.

SCHOLIUM 4

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistantiae quadratis proportionalis primus ego dedi in Comment. tomo IV, ubi eadem sum usus methode.⁵⁾ Deinceps vero etiam GEL. ION. BERNOLLI litteras significavit se quoque in eadem resistantiae hypothesi i

1) Editio princeps: $\frac{q ds^2}{2a^2} = Pq ddx + qdPdx - 2 Pdx ds$. Correx. P. St.

2) L. EULERI Commentatio 13 (indicis ENESTROMIANI): *Curva tautochrona stentiam faciente secundum quadrata celeritatum*, Comment. acad. sc. Petrop. 4 p. 67; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series II, vol. 4. P. St.

ronam repperisse¹⁾; cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730. aliis vero resistentiae hypothosibus excepta ea, quae ipsis celeritatibus proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tantochronas determinavit. Quod enim ad eas curvas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726 tantochronarum nomine dedi²⁾, eae quaesito non satisfaciunt, uti (Cf. HERMANNUS, qui primus easdem incidit³⁾, atque ego postea monstravimus.⁴⁾ Difficultas autem methodi huius tantochronas inveniendi in hoc consistit, quod in aliis resistentiae hypothosibus celeritas non possit universaliter ex aequatione earum determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tantochronas investigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediorum rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tantochronas inveniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82

PROBLEMA

738. In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothesi potentiae uniformis deorsum tendentis determinare curvam tantochronam AM (Fig. 80, p. 352), super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absolvantur temporibus.

SOLUTIO

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$ sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$, altitudo celeritatis

1) Vide litteras ab ION. BERNOLLI 27. Dec. 1729 ad LEONHARDUM EULERUM datas, quae in E. KNESTROEM edidit Biblioth. Mathem. 4., 1903, p. 378. P. St.

2) ION. BERNOLLI, *Méthode pour trouver les tantochrones, dans les milieux résistans contre le carré des vitesses*, Mém. de l'Acad. d. sc. de Paris 1730, p. 78; *Opera omnia*, Tomus 1. Basiliae et Genevae 1742, p. 173. P. St.

3) L. EULERI Commentatio I (indiciis ENESTROEMIANI): *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, Acta acad. 1726, p. 361; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series 1. Vol. 4. P. St.

4) IAC. HERMANN, *Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibuscvis in corporibus resistenter agentibus*, Comment. acad. sc. Petrop. 2 (1727), 1729, p. 139; vide praefationem p. 158. P. St.

5) Vide notam 2 p. 366. P. St.

in M debita sit $= v$, exponentis resistantiae $= k$ atque $\frac{v^m}{k^m}$, ubi k est quantitas valde magna, ita ut fractiones, k plurium quam m dimensionum habent, pro evanescentibus haberi possint. His positis erit ex natura descensus

$$dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}.$$

Iam si resistantia prorsus abesset, curva quaesita esset parabolica; tunc est

$$gx = as^2;$$

quia autem medium est rarissimum, curva quaesita non parabolica differet; ponatur igitur aequatio pro curva quaesita haec

$$gx = as^2 + \frac{\beta s^n}{k^m}.$$

Quia vero est

$$dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m},$$

propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde parvum erit proxime

$$v = C - gx = C - as^2 - \frac{\beta s^n}{k^m},$$

ubi constans C ex hoc determinatur, quod, si fit $s = 0$, v erit

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) \text{ quam pro } Q \text{ ponamus.}$$

Ponatur ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + Q,$$

erit

$$\begin{aligned} dv &= -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gdx \\ &= -2\alpha s ds - \frac{n\beta s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)}{k^m} \end{aligned}$$

neglectis reliquis terminis, qui pro v^m poni deberent, quod m in denominatore habet dimensiones. Ex his

$$Q = \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$$

hoc ita accepto, ut evanescat posito $s = f$. Erit ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\beta}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m}f'(f^2 - s^2)^m ds$$

$$\frac{1}{Vv} = \frac{1}{V\alpha(f^2 - s^2)} - \frac{\beta(f^n - s^n) + \alpha^m f'(f^2 - s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc tempus

$$t/v = \int \frac{ds}{V\alpha(f^2 - s^2)} - \frac{\beta}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m} \int \frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m} \int \frac{ds f'(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}},$$

integratum, ut evanescat posito $s = 0$, dabit tempus, quo corpus s arcum $MA = s$ absolvit. Totum ergo descensus tempus per obtinebitur, si post integrationem ponatur $s = f$; quod tempus debet trans se ita comparatum, ut non pendeat ab f . Primus autem terminus

$$\int \frac{ds}{V\alpha(f^2 - s^2)}$$

est integrationem $s = f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua α inest f ; prodit enim $\frac{\pi}{2V\alpha}$. Quamobrem si duo reliqui termini comparati, ut, postquam positum est $s = f$, sese destruant, quosito effectum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec ex-
pressionem, quae est constans. Debet ergo esse

$$\beta \int \frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}} = -\alpha^m \int \frac{ds f'(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

est integrationem $s = f$. Dat autem

$$\int \frac{ds(f^n - s^n)}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$= f$ multiplex potestatis ipsius f , cuius exponens est $n - 2$, atque integrale

$$\int \frac{ds f'(f^2 - s^2)^m ds}{(ff - ss)^{\frac{3}{2}}}$$

posito $s = f$ dat multiplex potestatis ipsius f .
 Fiat igitur $n = 2m + 1$ atque β ita sumatur, ut
 f , quarum utriusque exponentis erit $2m - 1$, ses-
 pareat, quales coefficientes habiturae sint istae in
 simplicioribus concludemus. Integratis igitur
 evanescant posito $s = 0$, tumque facto $s = f$ rep-

$$\int \frac{(f-s)ds}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1} \quad \text{atque} \quad \int \frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1} f^{-1}$$

hincque erit generaliter

$$\int \frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$$

unde erit

$$\beta \int \frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$$

Alterius termini coefficientis ex eadem analogia in-
 tione ita instituta, ut integrale evanescat posito

$$\begin{aligned} \int (f^3-s^3)ds &= -f^{2m}(f-s) + \frac{m}{1 \cdot 3} f^{2m-2}(f^3-s^3) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} f^{2m-4}(f^5-s^5) \end{aligned}$$

Hacc igitur series in

$$-\frac{\alpha^n ds}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ducta et integrata atque tum posito $s = f$ dabitur

$$\alpha^n f^{2m-1} \left(1 - \frac{2m}{1 \cdot 3} + \frac{4m(m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{8m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right)$$

His igitur duobus valoribus inter se aequatis pro-

$$\beta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2m(2m-1)}$$

quo valore loco β substituto habebitur pro cu-

pertinente, posito $\frac{1}{a}$ loco α homogeneitatis ergo, sequens aequatio

$$gxc = \frac{s^2}{a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)s^{2m+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1)a^m k^m}.$$

Vel si ex x desideretur s , hinc oritur ista aequatio

$$s = \sqrt{gax} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)g^m ax^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1)2k^m}.$$

Atque tempus uniuscuiusque descensus super hac curva erit $= \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$; longitudo penduli in vacuo a gravitate naturali $= 1$ sollicitati eodem tempore descensus absolvantis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curva tantochna mutatur in aequationem pro curva, super qua omnes ascensus aequalibus temporibus, tempore scilicet $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, absoluntur, si loco k^m scribatur $-k^m$. Q. E. D.

COROLLARIUM 1

739. Si $2m+1 > 2$ seu $m > \frac{1}{2}$, curvae radius osculi in puncto A idem erit qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$, scilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo casibus corpus minimum descensum absolvit eodem tempore quo in vacuo; seu descensus super infima curvae portinnacula infinite parva idem erit in vacuo et in medio resistente, si modo $m > \frac{1}{2}$.

COROLLARIUM 2

740. Si $m = \frac{1}{2}$, in utroque termino s habebit duas dimensiones. Quare radius osculi in A non amplius erit $\frac{ga}{2}$, sed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum resistit, tempus descensus minimi pendulum circularum minus erit quam in vacuo hocque in data ratione.

COROLLARIUM 3

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$, vortum tamen > 0 , radius osculi in A erit infinitus; super hac ergo curva in vacuo minimus descensus absolveretur tempore infinito parvo, cum in medio resistente finito tempore perficiatur.

SCHOLION 1

742. Quod ad hunc casum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc, aequatione sequitur, quam in medio rarissimo ponimus. In casu autem, quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini sistit, etiamsi medium sit rarissimum, non satisfaciunt quibus gx aequatur, considerari debent tanquam convergentis, in qua sequentes prae primis evanescunt. Huiusmodi habebit formam

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m}}{a^{3m-2} k^{3m}}$$

in qua exponentes ipsius s in progressionem arithmetice formam partim ex analogia, partim ex ipsa ratione, inveniendum usi sumus, colligi potest. Ex hac iam puncto infimo A conditionem, si $m < \frac{1}{2}$, ex duobus non posse, quantumvis k sit magnum. Quia omnes crescunt, in sequentibus terminis s tandem in denique quo posito $s=0$ fiet $x=\infty$, ex quo apparet cur terminari neque radium osculi in hoc loco posse et non habet locum, si exponentes ipsius s crescunt.

SCHOLION 2

743. Hinc igitur patet modus curvam tantocumque celeritatum ratione multiplicata resistente non fuerit rarissimum. Cum enim aequatio pro ta-

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m}}{a^{3m-2} k^{3m}}$$

quemadmodum ex conditione tautochronismi valde minimavimus, eodem modo etiam coefficientes reliqui definiri. At propter tantopere compositas formulae insuperabilis, qui autem forte sublevabitur, si coefficientem B vel ad summum duos B et C determinemus quoniam sequentes ex analogia concludi possent.

n, quo $m=1$, cognita sit, quippe ex superioribus (§ 724) habemus

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} + \text{etc.},$$

ad generalem inveniondam non parum subsidii afferet. Terminus
 niri debet ex sequente aequatione

$$\begin{aligned} \frac{(f^m)ds}{(ff-s)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{3}{4} A^2 \int \frac{(f^{2m+1} - s^{2m+1})^2 ds}{(ff-s)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2} A \int \frac{ds(f^{2m+1} - s^{2m+1}) f ds (ff-s)^m}{(ff-s)^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad - m A \int \frac{ds f ds (f^2 - s^2)^m}{(ff-s)^{\frac{5}{2}}} - m A \int \frac{ds f ds (ff-s)^{m-1} (f^{2m+1} - s^{2m+1})}{(ff-s)^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad - m \int \frac{ds f ds (ff-s)^{m-1} f ds (ff-s)^m}{(ff-s)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

tionis integralia ita sunt sumenda, ut evanescant posito $s=f$,
 ni debet $s=0$; atque tum valor ipsius B invenietur. Coefficientis
 cognitus est; invenimus enim

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m(2m+1)}.$$

quo $m=1$, superiorem aequationem evolvi invenique $B = \frac{1}{18}$ exi-
 , id quod egregio congruit. Si autem valores coefficientium in
 otescerent, tum haberetur quidem aequatio serio infinita constans
 ona quaesita; quae autem, si eius lex cognita fuerit, per metho-
 eries summandi') in aequationem terminorum numero finito con-
 stformari poterit. Atque hanc propemodum unicum et tutissimam
 odum, cuius opo tautochronae in aliis resistentiae hypothosibus
 ant.

COROLLARIUM 4

igitur aequatio

$$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \text{etc.}$$

exprimat tautochronam descensum, ascensus tautochronos

$$y^x = \frac{s^2}{a} - \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} - \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} + \dots$$

quae oritur ponendo k negativum.

COROLLARIUM 5

745. Perspicitur hinc, quoties m fuerit numerus integer, tautochronam ascensibus inservientem ANC (Fig. 83, p. 362) esse tautochronam descensuum BMA . Eadem enim aequatio oritur, si k ponatur negativum.

COROLLARIUM 6

746. Praeterea intelligitur curvam ANC , super qua omnia tempora absoluntur quo descensus super curva BMA , quam BMA et cuspidem C altius habere positam, quoniam quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

COROLLARIUM 7

747. In medio, quod in simplici ratione celeritatum ratio s exponentes sunt $= 2$; ex quo sequitur tam tautochronam ascensuum esse semicycloides. Ea vero pro ascensu, quia coefficientem quam pro descensu, maiore circulo oritur tempora ascensuum aequalia esse debeant temporibus descensuum eadem cyclois continua semioscillationes quoque producit suum vero tempora erunt minora quam tempora descensuum.

SCHOLION 3

748. Si m est numerus integer, facili ex data formula valor definiri. Namque si $m = 1$, erit $A = \frac{1}{a}$, si $m = 2$, porro. At si m non est numerus integer, difficilior est series enim valorum ipsius A debet interpolari. Pro quibus denominator est 2, valor ipsius A per quadratum definiri. Posito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter

$$\begin{array}{l} m \mid \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \\ A \mid \frac{1}{\pi}, \quad \frac{2}{3 \cdot 2\pi}, \quad \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3\pi}, \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4\pi} \end{array}$$

si fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$, fore

$$A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \frac{1}{(n+1)\pi}$$

$$gx = \frac{s^3}{a} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot s^{2n+2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi a^n k^{2n}}$$

icet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecumque autem m fuerit fractio, erit perpetuo

$$A = \frac{1}{(2m+1)^2} \int ds(1-z)^m$$

ita accepto, ut evanescat posito $z = 0$, atque tum posito $z = 1$, in docui in Comment. A. 1730, in Dissertatione *De progressionibus us.*¹⁾

COROLLARIUM 8

nunc pro singulis modis resistantibus rarissimis quorundam descensuum, casu se habebunt, ut sequitur:

$m = 0$	$gx = \frac{s^2}{a} + s$
$m = \frac{1}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^2}{\pi \sqrt{ak}}$
$m = 1$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak}$
$m = \frac{3}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak \sqrt{ak}}$
$m = 2$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2k^2}$
$m = \frac{5}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{8s^6}{45\pi a^2k^2 \sqrt{ak}}$
$m = 3$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^3k^3}$

abuntur tantochronae ascensuum, si ultimi termini fiant negativi.

Commentatio 19 (indiciis EULERIANIS): *De progressionibus transcendensibus, quae generaliter algebraice dari nequeant*, Comment. Acad. Sc. Petrop. 6 (1730/1),
 EUGENII EULERII Opera omnia, series I, vol. 14. P. St.

750. Haec igitur sufficiant de tantochronis simplicibus omnes descensus tantum vel omnes ascensus aequalibus poribus. Praeter has autem curvas etiam aliae tantochronae pellari possunt, super quibus vel omnes semioscillationes omnes integrae oscillationes sint isochronae; quarum curvarum etiam in vacuo est infinitus. Quod autem ad integras haec quaestio resistentiae propria est; in vacuo enim omnes inter se sunt aequales. Quia autem in his quaestionibus veniendae proponuntur, quarum altera ad ascensus, altera ad descensus lineat, antequam huiusmodi quaestiones pro tantochronis faciliores propositiones circa binas curvas ascensum et descensum praemitemus.

PROPOSITIO 83

PROBLEMA

751. In hypotesi potentiae uniformis deorsum tendentis, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, data curva MA

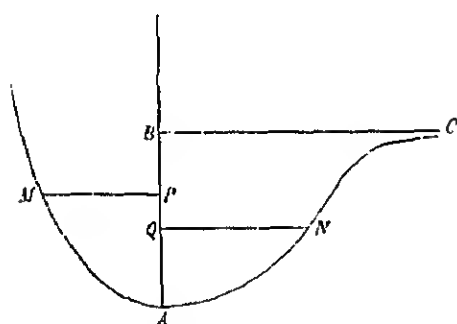


Fig. 84.

alteram AN illi in
indolis, ut corpus per
 MA super curva
curva quaesita ascen-
 AN , qui aequalis s

SOL.

Positis potentia
ponente resistentiae

quam ex descensu acquisivit quaque super curva quaesita
choat, debita altitudini b sit pro curva data abscissa AP
pro quaesita vero sit abscissa $AQ = t$ atque arcus AN
altitudo celeritati corporis descendentis in M debita

$$= e^{\frac{1}{k}} \left(b - g \int e^{-\frac{x}{k}} dx \right)$$

ritati corporis ascendentis in N debita

$$x = e^{\frac{-r}{k}} \left(b - g \int e^{\frac{r}{k}} dt \right).$$

cus descensus provenit ex hac aequatione

$$b = g \int e^{\frac{-x}{k}} dx,$$

cus ascensus ex hac aequatione

$$b = g \int e^{\frac{r}{k}} dt.$$

ur descensus et ascensus haec habebitur aequatio

$$\int e^{\frac{-x}{k}} dx = \int e^{\frac{r}{k}} dt$$

entialis

$$e^{\frac{-x}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt.$$

s ascensus aequalis esse debeat areni descensus, ponatur $r = s$;
bit ista aequatio

$$e^{\frac{-x}{k}} dx = dt.$$

va MA data sit, dabitur aequatio inter s et x ; ex qua, si
valor per s et ds substituantur, prodibit aequatio inter t et s
 r propter $r = s$; quae determinabit naturam curvae quaesitae

COROLLARIUM 1

vae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = as^n$,
o infima curvae AN haec aequatio

$$dt = a n e^{\frac{-2s}{k}} s^{n-1} ds.$$

EXEMPLUM 1

760. Sit linea data recta verticalis; erit $x = s$. Pro cursuum quaesita ANE (Fig. 85) existente $AQ = t$ et $AN = s$ aequatio

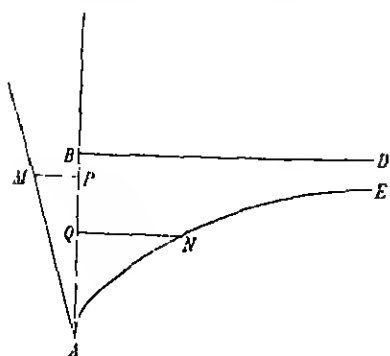


Fig. 85.

$$dt = e^{-\frac{2s}{k}} ds \quad \text{seu} \quad t =$$

Atque eliminata quantitas s erit

$$2t ds = k ds - k dt \quad \text{sive} \quad ($$

Ex qua aequatione perspicitur ANE esso tractoriam suam

horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipsa tractoria ANE pro curva descripiatur, ei respondebit curva quaesita, cuius abscissa arcui s respondebit $= \int e^{-\frac{2s}{k}} ds$; quae ergo curva iterum erit tractoria asymptotice habens, cuius asymptotos supra A elevata est intervallo $\frac{1}{4}k$, illi aequatur. Seriei vero superioris omnes curvae oriuntur tractrices generantur, quorum longitudines constituent hanc seriem $\frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{8}, \dots$ Recta scilicet verticalis tanquam tractoria considerari potest generans est $\frac{k}{0}$ seu infinitum. Ultima autem huius seriei tractoria erit horizontalis per A ducta.

EXEMPLUM 2

761. Si linea descensuum data fuerit recta utcumque ad horizontem inclinata MA (Fig. 85), ita ut sit $MA(s) : AP(x) = \alpha : 1$ seu $x = \frac{s}{\alpha}$ bitur pro curva quaesita AN ista aequatio

$$adt = e^{-\frac{2s}{k}} ds,$$

cuius integralis est

$$\alpha t = \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2s}{k}} \right).$$

ationibus coniunctis oritur

$$2atds = kds - akdt \quad \text{scilicet} \quad \left(\frac{k}{2a} - t\right) \frac{ds}{dt} = \frac{k}{2}$$

quoque est pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ super asymptoto genita existente $AB = \frac{k}{2a}$; hacque tractoria per A transire sequentes curvae omnes sunt quoque tractoriae ut in praecedentibus quarum fila generantia sunt $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc., earum vero puncto A distantiae tenent hanc progressionem $\frac{k}{0a}, \frac{k}{2a}, \frac{k}{4a}$, scilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum communem angulo PAM .

COROLLARIUM 8

Tractoriarum harum ea, quae primam seu rectam MA praecedit, habet proprietatem, ut corpus super ea descendens posteaque ascendens aequalia spatia percurrat.

COROLLARIUM 9

Curvam igitur descensuum CA indam, cui respondent recta in super asymptoto horizontali filo describatur tractoria CA in eaque recta $Ab = \frac{k}{2a}$ et ex A constituatur AM ; eritque CA curva descendens et recta AM pro ascensibus.

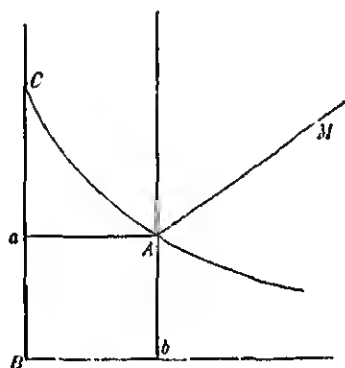


Fig. 86.

SCHOLIUM 2

Irre potest hic casus instar exempli problematis inversi, quo descendens curva descensuum requiritur.

EXEMPLUM 3

Curva descensuum data cyclois MA (Fig. 84, p. 376), cuius natura sit expressa

$$2ax = s^2$$

seu circuli genitoris **diameter** $= \frac{a}{2}$. Erit ergo

$$dx = \frac{sds}{a},$$

unde pro curva altera ascensum AN haec invenitur aequatio

$$adt = e^{\frac{-2s}{k}} sds,$$

cuius integralis est

$$at = \frac{k^2}{3} \left(1 - e^{\frac{-2s}{k}} \right) - \frac{k}{2} e^{\frac{-2s}{k}} s,$$

quae propter

$$e^{\frac{-2s}{k}} = \frac{adt}{sds}$$

abit in hanc

$$atsds = -\frac{ak^2dt}{4} + \frac{k^2sds}{4} - \frac{aksdt}{2}.$$

Haec curva in A , ut iam est dictum, tangentem habet. Habebit vero etiam asymptotem BC horizontalem; cuius abscissa erit, si s fiat $= \infty$. Fiet autem hoc casu $e^{\frac{-2s}{k}} = 0$; quare ex hoc intelligitur curvam alicubi punctum flexus contingere, quod invenietur, si posito dt constante ponatur $dds = 0$. $1 = \frac{2s}{k}$ seu $s = \frac{k}{2}$. Quare si summatur arcus $AN = \frac{k}{2}$, erit contrarii; cui respondet abscissa $AQ = \frac{k^2}{4a} - \frac{k^2}{2ae}$ seu BQ erit semper $AB : BQ = e : 2 = 2,71828 : 2$.

SCHOLION 3

766. Problema hoc propositum extat ab anonymo in *Acta acad. Petrop.* A. 1728, p. 17, cuiusque solutionem dedit in *Comment. Acad. Petrop.* A. 1728, p. 17, alia usque methodo. Praeter hanc vero conditionem animum requirit unam curvam continuam, cuius alter ramus ascensibus inserviat, cuiusmodi curvae dantur innumerae propositione detegemus.

1) *Problema geometricum propositum*, *Acta erud.* 1728, p. 523.

2) DAN. BERNOULLI, *Theorema de motu curvilineo corporum, quae resistentiae suae quadrato proportionalis*, *Comment. acad. sc. Petrop.* 4 (1730), p. 17.

PROPOSITIO 84

PROBLEMA

idem positis ut ante invenire curvam continuam MAN (Fig. 84, modi, ut in quavis semioscillatione, quae semper in arcu MA incipiat, a arcus descensus MA aequalis sit arcui ascensus sequentis AN.

SOLUTIO

tio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data MA ; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod MA et AN unam eandemque curvam continuam constituere tantis igitur arcibus AM et AN aequalibus $= s$ et posita $AP = x$ t erit

$$dt = e^{-2s} dx,$$

curva MAN debet esse continua, aequationem inter s et x ita comparatam, ut, si in ea loco s ponatur $-s$, quo casu arcus in AN abit, valor ipsius x fiat $= t$ seu

$$x = \int e^{2s} ds.$$

$dx = Mds$, ubi M sit functio quaedam ipsius s , eaque abeat in $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s , quo casu x abit in t , $-Nds$. Est vero quoque

$$dt = e^{-2s} dx = e^{-2s} Mds,$$

$$N = -e^{-2s} M.$$

$$M = e^{+s} P$$

in Q posito $-s$ loco s eritque

$$N = e^{-s} Q.$$

Quibus valoribus loco M et N substitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo
 P huiusmodi esse debere functionem ipsius s , quae abeat in $-P$ posi
 loco s , quas functiones impares appellare consuevi. Sit itaque P
 quaecunque impar ipsius s , cuiusmodi sunt e. gr. αs , αs^3 , αs^5 etc., erit

$$M = e^{\dot{k}} P ds \quad \text{sen} \quad x = \int e^{\dot{k}} P ds.$$

Quae est aequatio pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

768. Quia est

$$dx = e^{\dot{k}} P ds,$$

erit sumendis logarithmis

$$l dx = \frac{s}{k} + l P + l ds.$$

Differentietur haec aequatio denuo posito ds constante prodibitquo

$$\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P} \quad \text{sen} \quad k P ddx = P dx ds + k dx dP.$$

Quae aequatio ab exponentialibus est libera.

COROLLARIUM 2

769. Quoniam P per s dari debet, aequatio inventa non habet var
 inter se permixtas; quamobrem ea sufficit ad curvas in ea contentas
 struendas.

EXEMPLUM

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$; erit

$$ax = \int e^{\dot{k}} s ds = k e^{\dot{k}} s - k^2 e^{\dot{k}} + k^2,$$

quae est aequatio pro nova et fortasse simplicissima curva satisfaciendo.

vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\dot{k}}$ abit in hanc

$$axs ds = aks dx - k^2 a dx + k^2 s ds.$$

exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio

$$ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1 \cdot 3k} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 4k^2} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5k^3} + \text{etc.}$$

ec ergo curva in A habet tangentem horizontalem eiusque radius o
hoc loco est a . Quia, ne curva fiat imaginaria, esse debet $dx < ds$
bit esse $e^{\frac{s}{k}} < a$. Quo ergo loco sit $e^{\frac{s}{k}}$, quae expressio crescente s qu
scit, aequalis a , ibi curva AM habebit tangentem verticalem atque p
i reversionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aeq

$$ax = \int e^{\frac{-s}{k}} ds \quad \text{son} \quad dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}} ds}{a}.$$

are quandiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}} < a$, curva non fit imaginaria. At si usq
 $s = a$, ibi curva quoque habebit punctum reversionis et diametrum v
om. Fieri autem potest, si a satis magnum accipiat, ut $e^{\frac{-s}{k}}$ se
ius sit quam a , quo casu curva AN in infinitum abibit asymptoto
debit horizontalem BC . Fit autem $e^{\frac{-s}{k}} = 0$ casibus $s = 0$ et $s =$
debit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= 0$; hoc vero cas
 $= s$ et

$$e^{\frac{-s}{k}} = \frac{k}{c}.$$

are si fuerit $a > \frac{k}{c}$, curva habebit asymptoton BC , cujus altitudo BA
 $\frac{k}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{c}$, curva AN uti alter ramus habebit quoque p
n reversionis, quod ex hac aequatione determinabitur

$$a = e^{\frac{-s}{k}}.$$

priori casu curva AN habere debet punctum flexus contrarii, quod
tur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumte arcu $AN = k$

PROBLEMA

771. *In hypothesis gravitatis et resistentiae praecedente* MA (Fig. 84. p. 376), *super qua descensus absolvantur, in* AN *huius proprietatis, ut ascensus cuiusque tempus* $descensus praecedentis.$

SOLUTIO

Positis ut ante potentia sollicitante $=g$ et medii pro curva MA abscissa $AP=x$, arcus $AM=s$ atque AN abscissa $AQ=t$, arcus $AN=r$. Ponatur altitudo quodam in A acquisitae debita $=b$, qua celeritate corpus in curva AN absolvat. His positis erit altitudo cel

$$=e^{\frac{s}{k}} \left(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx \right)$$

et altitudo in ascensu celeritati in N debita

$$=e^{\frac{r}{k}} \left(b - g \int e^{\frac{-r}{k}} dt \right).$$

Tempus ergo descensus per arcum MA erit

$$= \int_{\frac{-s}{k}}^{\frac{s}{k}} \frac{ds}{e^{\frac{s}{k}} V \left(b - g \int e^{\frac{-s}{k}} dx \right)}$$

et tempus ascensus per arcum AN

$$= \int \frac{e^{\frac{r}{k}} dr}{V \left(b - g \int e^{\frac{-r}{k}} dt \right)},$$

quae duo tempora, si post integrationem ponatur

$$g \int e^{\frac{-s}{k}} dx = b \quad \text{atque} \quad g \int e^{\frac{-r}{k}} dt = b,$$

se aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum

$$g \int e^{\frac{-x}{k}} dx = X, \quad g \int e^{\frac{r}{k}} dt = T$$

$$\frac{dS}{e^{\frac{x}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{2k}} dr = dR,$$

S et R sint tales functiones, quae evanescant posito x, t, s et efficiendum ergo est, ut haec duo integralia

$$\int \frac{dS}{V(b-X)} \quad \text{et} \quad \int \frac{dR}{V(b-T)}$$

se aequalia, si post integrationem ponatur $X=b$ et $T=b$. At uti et X et T sunt quantitates a b prorsus non pendentes atque inter se relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit, ergo satisfiat, si R fuerit talis functio ipsius T , qualis S est ipsius X sumto $R=S$ osse quoque debet $T=X$. Est vero

$$S = 2k(1 - e^{\frac{-x}{2k}}) \quad \text{et} \quad R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1);$$

ut $R=S$ erit

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-x}{2k}} \quad \text{atque} \quad r = 2kt(2 - e^{\frac{-x}{2k}}).$$

om hoc posito esse debet $X=T$ seu

$$e^{\frac{-x}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt,$$

$$t = \int e^{\frac{-x-r}{k}} dx.$$

o sit

$$e^{\frac{r}{k}} = (2 - e^{\frac{-x}{2k}})^2 = 4 - 4e^{\frac{-x}{2k}} + e^{\frac{-x}{k}},$$

$$t = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{k}} (2 - e^{\frac{-x}{2k}})^2} = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{x}{2k}} - 1)^2}.$$

Ex quibus ergo constructio curvae innotescit, quia sunt

$$AN = r = 2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$$

huic respondet abscissa

$$AQ = l = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{x}{2k}} - 1)^2}.$$

Aequatio vero pro curva AN commodius invenietur si inter s et x . Nam quia est

$$s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}}) \quad \text{et} \quad x = \int \frac{dl}{(2e^{\frac{x}{2k}} - 1)^2}$$

si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio curvae quaesita AN . Q. E. I.

COROLLARIUM 1

772. Quia est $r = 2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$, erit

$$dr = \frac{e^{\frac{r}{2k}} ds}{2 - e^{\frac{r}{2k}}}.$$

Cum vero, ne curva AN fiat imaginaria, esse debeat $ds > dx$, consequens erit realis, quousque

$$ds > \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}}(2 - e^{\frac{x}{2k}})} \quad \text{seu} \quad ds > \frac{dx}{2e^{\frac{x}{2k}} - 1}.$$

COROLLARIUM 2

773. Est vero $e^{\frac{x}{2k}}$ semper maius unitate; ex quo $ds > dx$, eo magis fore

$$ds > \frac{dx}{2e^{\frac{x}{2k}} - 1}.$$

Quare si curva data fuerit realis, quaesita quoque semper

COROLLARIUM 3

Cum sit $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$, erit

$$ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}} dr}{2 - e^{\frac{r}{2k}}} = \frac{dr}{2e^{\frac{r}{2k}} - 1},$$

us relatio inter ds et dx in computum duci potest.

COROLLARIUM 4

Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inversum sum. Si enim curva ascensuum AN datur seu aequatio inter t et x equatio inter x et s formabitur ope aequationum

$$t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{x}{2k}} - 1)^2} \quad \text{et} \quad r = 2kl(2 - e^{\frac{x}{2k}}).$$

COROLLARIUM 5

Ad curvae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r quae eritquo $e^{\frac{r}{2k}} = 1$, unde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo curvarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et

EXEMPLUM 1

Sit linea descensuum data recta MA (Fig. 85, p. 380) utcumque insit $s = ax$ seu $ds = adx$. Cum nunc sit

$$ds = \frac{dr}{2e^{\frac{r}{2k}} - 1} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{r}{2k}} - 1)^2},$$

inter t et r pro curva quoesita ista aequatio

$$dr = -\frac{adt}{2e^{\frac{r}{2k}} - 1} \quad \text{seu} \quad a dt = 2e^{\frac{r}{2k}} dr - dr,$$

gralis est

$$at = 4k(1 - e^{\frac{r}{2k}}) - r.$$

Quao aequatio in seriem conversa dat

$$\alpha t = r - \frac{r^3}{1 \cdot 2k} + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2k^3} - \frac{r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4k^3} + \dots$$

ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha dt$. Curva haec alio-
gentem horizontalem, qui locus invenitur ponendo $dt = 0$
 $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque
quam $2kl2$, valor ipsius dt fiet negativus ideoque curva
donec $-dt$ fiat $= dr$; hoc autem accidit, si est

$$1 - \alpha = 2e^{\frac{r}{2k}} \quad \text{seu} \quad r = 2kl \frac{2}{1 - \alpha}.$$

At quia α non potest esse minus quam 1, si est $\alpha = 1$, tan-
infinitum ab A distabit, atque si $\alpha > 1$, ultra tangentem
quam habebit tangentem verticalem. Sed antrosum ultra t-
verticalem, ubi est

$$r = -2kl \frac{1 + \alpha}{2}.$$

Casu ergo, quo linea data est verticalis seu $\alpha = 1$, fit $r =$
 A erit verticalis.

COROLLARIUM 6

778. Si s denotet totum arcum descensus, r exprin-
sequenti ascensu super curva AN (Fig. 84, p. 376) descriptum
arcus descensus s , reperiatur arcus ascensus

$$r = 2kl(2 - e^{\frac{s}{2k}}).$$

Quoniam enim posuimus $T = X$, integros arcus descensus s
 s et r denotant.

EXEMPLUM 2

779. Sit curva data MA ipsa tautochrone descensusum
eadem resistantiae hypothesei invenimus; habebit curva AN
ut omnes ascensus aequalibus quoque absolvantur temporib-
quibus descensus super MA . Quaro curva AN erit ipsa t-
suum cum curva MA continua iam ante inventa. Quo h-

endatur, sumamus aequationem pro curva tautochrone descensuum,
§ 719]

$$\text{vel } adx = k(c^{2k} - 1)ds \quad \text{vel} \quad ax = 2k^2(c^{2k} - 1) - ks.$$

sit

$$s = \frac{dr}{2c^{2k} - 1} \quad \text{et} \quad c^{2k} = \frac{e^{-r}}{2c^{2k} - 1} \quad \text{atque} \quad dx = \frac{dt}{(2c^{2k} - 1)^2},$$

erit

$$\frac{adt}{(2c^{2k} - 1)^2} = \frac{kdr(1 - e^{-r})}{(2c^{2k} - 1)^2}$$

$$adt = k(1 - e^{-r})dr.$$

ratio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s . Quare
 AN est continua cum MA atque tautochrone ascensuum.

COROLLARIUM 7

Dato ergo arcu descensus s super tautochrone descensuum erit
sus sequentis super tautochrone ascensuum

$$r = 2kl(2 - e^{2k}).$$

descensus a cuspidе tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat

$$e^{2k} = \frac{a+k}{k}.$$

et arcus ascensus

$$r = 2kl \frac{2a+k}{a+k},$$

proponimus (§ 732).

SCHOLIUM

Cum itaque tautochrone in hac resistantiae hypothesis quaesito
atque sit curva continua, hinc ansam arripimus investigandi plures
curvas, quarum duo rami vices curvarum MA et AN sustinere
quod in sequente propositione praestabimus.

PROBLEMA

782. *Iisdem positis ut ante invenire casus, quibus duae curvae (Fig. 84, p. 376), super quibus descensus et sequentes ascensus poribus absolvantur, unam curvam continuam constituunt.*

SOLUTIO

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedenti usi sumus, scilicet $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$ aequationes ibi inventas

$$2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$$

effici debet, ut aequationes inter s et x et inter r et t sub oculo comprehendantur. Sumamus ad hoc novam variabilem z , ex M in curva AM determinetur, ita ut, si z fiat negativum oblineatur punctum N in altera curva. Hanc ob rem s oportet functionem ipsius z , ut eadem, si loco z ponatur $-AN$, qui ob positionem negativam est $-r$, ita ut s abeat $-s$ loco z . Ponatur

$$e^{\frac{-s}{2k}} = 1 + Q;$$

erit

$$e^{\frac{r}{2k}} = 1 - Q$$

propter $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$ ideoque Q erit functio impar ipsius z negativam ab initio facto z negativo. Erit itaque

$$e^{\frac{-s}{k}} = (1 + Q)^2 \quad \text{et} \quad e^{\frac{r}{k}} = (1 - Q)^2.$$

Porro autem esse debet

$$dx(1 + Q)^2 = dt(1 - Q)^2$$

atque x talis esse debet functio ipsius z , quae abeat in negativo. Ponatur $dx = Mdz$ abeatque M in N facto z nega-

unobrem fiet

$$M(1 + Q)^2 = -N(1 - Q)^2.$$

$$M = P(1 - Q)^2$$

o = functioni impari ipsius z ; atque tum fiet

$$N = -P(1 + Q)^2$$

inter se orunt $M(1 + Q)^2$ et $-N(1 - Q)^2$, uti requiritur. Substituta loco P et Q functionibus imparibus ipsius z erit

$$x = Pdz(1 - Q)^2 \quad \text{sen} \quad x = \int Pdz(1 - Q)^2$$

$$s = 2kl \frac{1}{1 + Q}.$$

es oriuntur curvae MA , quarum partes continuas AN et isochronos respectivo descensibus super MA factis. Quia rationes occurrunt P et Q , determinetur altora, ut sit

$$s = 2kl \frac{1}{1 + z} \quad \text{atquo} \quad x = \int Pdz(1 + z)^2.$$

ore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2kl}}$, substituitur aequatio inter x et s pro curva quaesita. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipsius $Pdz(1 + z)^2$ ita evanescat posito $z = 0$. Nam evanescente arcu s abscissa re debet.

COROLLARIUM 2

$$s = 2kl \frac{1}{1 - z}, \text{ erit}$$

$$ds = \frac{2k dz}{1 - z},$$

ra omnia II: Mechanica

et quia est $dx = Pdz(1+z)^2$, erit

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)^2}$$

nisi ergo $P(1-z^2)(1+z)$ maius fuerit quam $2k$, curva erit

COROLLARIUM 3

785. In puncto infimo A , quia evanescit z , erit.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P}$$

Quare P talis esse debet functio impar ipsius z , ut ea, si
quam $2k$; hoc autem evenire non potest, nisi P talis fuerit
quae evanescat posito $z=0$, hocquo casu tangens in A ori-

EXEMPLUM 1

786. Quia P debet esse functio impar ipsius z , ponatur

$$P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$$

Quo posito erit

$$dx = \int \frac{azdz}{(1-z^2)^2} \quad \text{seu} \quad dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}$$

Est vero

$$z = 1 - e^{\frac{s}{2k}} \quad \text{et} \quad dz = -\frac{1}{2k} e^{\frac{s}{2k}} ds \quad \text{atque} \quad 1-z = e^{\frac{s}{2k}}$$

Quibus substitutis habebitur

$$dx = \frac{ae^{\frac{s}{2k}} ds (1 - e^{\frac{s}{2k}})}{2k e^{\frac{s}{k}}} = \frac{ads}{2k} (e^{\frac{s}{2k}} - 1).$$

Quae est aequatio pro curva tautochrone supra inventa,
 MA omnes descensus aequalibus absolvuntur temporibus,
altera AN omnes ascensus iisdem temporibus.

EXEMPLUM 2

$$P = \frac{6az - 2az^3}{(1-z^2)^2};$$

$$x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z^2)^2} = \frac{3az^2 + az^3}{1-z}.$$

it

$$z = 1 - e^{2k} \quad \text{ob} \quad 1 - z = e^{2k},$$

$$\frac{(e^{2k})^2 (1 - e^{2k})}{e^{2k}} = a(1 - e^{2k})^2 (4e^{2k} - 1) = a(4e^{2k} - (3 - e^{2k})^2).$$

o in seriem conversa dat

$$\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^3} + \frac{s^5}{96k^5} - \frac{s^6}{640k^4} + \text{etc.} = bx$$

anto a in $\frac{4k^2}{8b}$.

PROPOSITIO 87

PROBLEMA

hypothesi gravitatis uniformis decursum tendentis et medio uniformi celeritatum ratione resistente si detur curva quaecunque MA (Fig. 87, qua corpus descensus absolvat, invenire curvam AN ei iungendam doneam, ita ut omnes semioscillationes, quae super curva MAN fiunt, solvantur temporibus.

SOLUTIO

ut hactenus potentia sollicitante g et expononto resistantiae k datae MA abscissa $AP = x$, arcus $AM = s$, curvae vero abscissa $AQ = t$, arcus $AN = r$. Incipiat nunc descensus in quo arcus MA puncto sitque celeritas in A acquisita debita altitudini b , quo corpus sequentem ascensum in curva AN absolvat. His positis celeritati corporis descendontis in M debita

$$= e^{\frac{s}{2k}} \left(b - g \int e^{\frac{-s}{2k}} dx \right)$$

et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita

$$= e^{\frac{r}{2k}} \left(b - g \int e^{\frac{-r}{2k}} dt \right).$$

Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN

$$= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} V(b - g \int e^{\frac{-s}{2k}} dx)} + \int \frac{dr}{e^{\frac{r}{2k}} V(b - g \int e^{\frac{-r}{2k}} dt)},$$

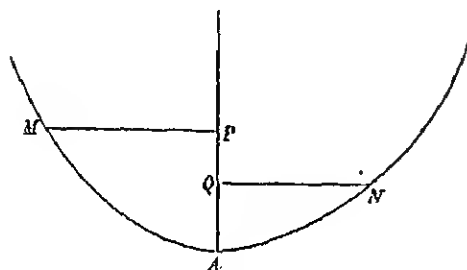


Fig. 87.

quae expressio integram
lationis tempus, si pos
ponatur

$$g \int e^{\frac{-s}{2k}} dx = b \quad \text{atque}$$

Cum igitur hoc tempus
habere valorem constant
quantitate litterae b p
conditione determinari c

inter t et r opo datae aequationis inter x et s . Ponamus

$$g \int e^{\frac{-s}{2k}} dx = X \quad \text{et} \quad g \int e^{\frac{-r}{2k}} dt = T$$

atque

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS \quad \text{et} \quad \frac{dr}{e^{\frac{r}{2k}}} = dR.$$

Quibus substitutis habere debet

$$\int \frac{dS}{V(b-X)} + \int \frac{dR}{V(b-T)}$$

post integrationem ponatur $X = b$
quia T ab X non pendet; habebim

$$\int \frac{dS + dR}{V(b-X)},$$

se comparata, ut post integrationem facto $X = b$ littera b evanescat. Hoc autem fiet, si fuerit

$$dS + dR = \frac{a dX}{VX};$$

semioscillationis

$$= \int \frac{a dX}{V(bX - XX)} = \pi a$$

superficiam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit

$$a = \frac{V^2 f}{Vg};$$

longitudinem penduli in vacuo et gravitate $= g$ semioscillationes tempore absolvantis, quo hac semioscillationes super curvis agnuntur (§ 167). Cum igitur sit

$$dS + dR = \frac{dX V^2 f}{Vg X},$$

$$S + R = 2 \int \frac{V^2 f X}{g} = 2 V^2 f \int e^{\frac{-x}{k}} dx.$$

$$S = 2k(1 - e^{\frac{-x}{k}}) \quad \text{et} \quad R = 2k(e^{\frac{x}{k}} - 1),$$

$$k e^{\frac{x}{k}} - k e^{\frac{-x}{k}} = V^2 f \int e^{\frac{-x}{k}} dx$$

$$e^{\frac{x}{k}} = e^{\frac{-x}{k}} + \frac{1}{k} V^2 f \int e^{\frac{-x}{k}} dx$$

$$r = 2kl(e^{\frac{x}{k}} + \frac{1}{k} V^2 f \int e^{\frac{-x}{k}} dx).$$

Ipsius r respondens valor ipsius t ex hac aequatione datur X seu

$$e^{\frac{x}{k}} dt = e^{\frac{-x}{k}} dx.$$

Ex quo invenitur

$$t = \int \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{k} e^{2k} \sqrt{2f} \int e^k dx\right)^2},$$

ex quibus constructio curvae innotescit. Aequatio autem pro
 AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, si loco

$$-2kl(e^{2k} - \frac{1}{k} \sqrt{2f} \int e^k dt)$$

et loco x hic valor

$$\int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k} e^{2k} \sqrt{2f} \int e^k dt\right)^2}.$$

His enim substitutis orietur haec aequatio inter r et t , qua
 quaesita AN . Q. E. I.

COROLLARIUM 1

789. Cum oscillationes minimae congruant cum oscillati
 si curvae MA tangens in A non fuerit horizontalis vel si
 A fuerit infinite parvus, curvae quaesitae AN radius oscu
 lū erit enim hoc casu tempus descensus minimi $= 0$ et
 $= \frac{\pi \sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

COROLLARIUM 2

790. Sin autem curvae MA in A radius osculi fuerit
 dinis, scilicet h , erit tempus descensus minimi $= \frac{\pi \sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$ (§
 tempus semioscillationis sit $= \frac{\pi \sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, erit radius osculi
 $= (2\sqrt{f} - \sqrt{h})^2$; debet autem esse $h < 4f$ seu $f > \frac{1}{4}h$, ne curva A

COROLLARIUM 3

791. Curvae ergo MA et AN in A et tangentem hor
 dium osculi communom habebunt, si fuerit $f = h$. Hoc e
 AN radius osculi in A fiet quoque $= h$.

SCHOLION 1

792. Quemadmodum hic ex data curva descensuum curvam ascensuum invenimus, ita perspicitur simili modo ex curva ascensuum data curvam descensuum inveniri posse; si enim detur aequatio inter t et x , quia est

$$s = -2kl \left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{1}{k} \sqrt{2f \int e^{\frac{x}{k}} dx} \right)$$

$$x = \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} \sqrt{2f \int e^{\frac{x}{k}} dx} \right)^2},$$

valoribus substituendis aequatio pro curva descensuum inter s et x dabitur.

COROLLARIUM 4

793. Cum f innumerabiles habere possit valores, modo sit $f > \frac{1}{4}h$, dabitur curvam sive descensuum sive ascensuum datam innumerabiles adiunguntur curvae eiusmodi, ut sentioscillationes super his factae sint omnino irregulares, omnino uti in vacuo fieri potest.

COROLLARIUM 5

794. Quia in solutione posuimus $Y = X$, hac aequatione relatio conueniens inter quemque arcum descensus integrum et arcum ascensus respondens. Ita, si arcus descensus fuerit s , erit arcus ascensus

$$r = 2kl \left(e^{\frac{s}{k}} + \frac{1}{k} \sqrt{2f \int e^{\frac{s}{k}} ds} \right).$$

EXEMPLUM 1

795. Sit linea descensuum data recta verticalis PA , pro qua est $s = x$, ergo quoque $ds = dx$ atque

$$\int e^{\frac{s}{k}} dx = k(1 - e^{\frac{s}{k}}).$$

Unde igitur fiet

$$r = 2kl \left(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}} \left(1 - e^{\frac{-s}{k}} \right) \right)$$

sen

$$e^{\frac{s}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}} \left(1 - e^{\frac{-s}{k}} \right).$$

Porro autem est

$$t = \int \frac{ds}{\left(1 + e^{\frac{s}{k}} \sqrt{\frac{2f}{k}} \left(1 - e^{\frac{-s}{k}} \right) \right)^2} \quad \text{sen} \quad e^{\frac{s}{k}} dt = \frac{r+s}{k} dr$$

Eliminato ergo s prodibit pro curva ascensuum ista aequatio

$$(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2}{e^{\frac{s}{k}} \sqrt{\left(4ff + 2fk + 2f^2 \right)}}$$

in qua variables sunt a se invicem separatae, quare ea aequationem sufficit. Integratio vero huius aequationis a quadrato. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ ista

$$dt + dr = \frac{dr \sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}} \quad \text{sen} \quad t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$$

quae aequatio ad eam, quam in capite praecedente [§ 464] potest.

EXEMPLUM 2

796. Sit linea descensuum data ipsa tantochrona c [§ 719] inventa, cuius aequatio est

$$adx = kds \left(e^{\frac{s}{2k}} - 1 \right).$$

Erit ergo

$$\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a} \int ds \left(e^{\frac{-s}{2k}} - e^{\frac{-s}{k}} \right) = \frac{2k^2}{a} \left(\frac{1}{2} - e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-s}{k}} \right) =$$

et

$$\sqrt{f} \int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}.$$

fiet

$$e^{2k} = e^{2k} + \frac{\sqrt{2f} - e^{2k} \sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f} + e^{2k} (\sqrt{a} - \sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$$

$$e^{2k} = \frac{e^{2k} \sqrt{a} - \sqrt{2f}}{\sqrt{a} - \sqrt{2f}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{e^{2k} dr \sqrt{a}}{\sqrt{2f} - e^{2k} \sqrt{a}}$$

$$adx = \frac{ake^{2k} dr (e^{2k} - 1)}{(e^{2k} \sqrt{a} - \sqrt{2f})^2}$$

porro sit

$$e^{2k} dx = e^{2k} dt,$$

$$ae^{2k} dt = \frac{ake^{2k} dr (e^{2k} - 1)}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2} \quad \text{sive} \quad a dt = \frac{ak dr (1 - e^{2k})}{(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2}$$

$$(-\sqrt{a} + \sqrt{2f})^2 dt = k dr (1 - e^{2k}),$$

minus esso dobet quam \sqrt{a} . Haec autem aequatio inventa communis tautochronas ascensuum; quae omnium harum cunque cum tautochronis iungatur, super curva ex iis composita omnes semidobent esse isochronae. Si sumatur $f = 2a$, aequatio erit haec

$$a dt = k dr (1 - e^{2k}),$$

tautochrone ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore descensus super tautochrone descensuum data, atque unatio tautochronae descensuum.

EXEMPLUM 3

Si linea descensuum data MA tautochrone ascensuum est quaeratur, ut cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio huiusmodi curva MA est

$$adx = k ds (1 - e^{2k}).$$

Erit ergo

$$\int e^{\frac{r}{2k}} dx = \frac{k}{a} \int ds (e^{\frac{r}{k}} - e^{\frac{r}{2k}}) = \frac{k^2}{a} \left(\frac{1}{3} - e^{\frac{r}{k}} + \frac{2}{3} e^{\frac{r}{2k}} \right) = \frac{k^2}{3a} (1 - 3e^{\frac{r}{k}} + 2e^{\frac{r}{2k}})$$

$$= \frac{k^2}{3a} (1 + 2e^{\frac{r}{2k}}) (1 - e^{\frac{r}{2k}})^2.$$

Ex his oritur

$$e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{r}{k}} + (1 - e^{\frac{r}{k}}) \sqrt[2f]{\frac{3a}{k^2} (1 + 2e^{\frac{r}{2k}})}$$

atque

$$t = \frac{k}{a} \int \frac{ds (1 - e^{\frac{r}{2k}})}{(1 + (e^{\frac{r}{k}} - 1) \sqrt[2f]{\frac{3a}{k^2} (1 + 2e^{\frac{r}{2k}})})^2},$$

ex quibus constructio curvae consequitur.

SCHOLIUM 2

798. Hoc exemplum ideo attulimus, ut appareat, cum tautochronam ascensum coniunctam esse oporteat, quo semioscillationibus aequalibus temporibus absolvantur. Ex formulis autem invenitur curvam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequati-

$$cdt = kdr(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$$

in illis formulis non continetur, quod periculum facienti s. Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascensuum, omnes itus per MAN iisdem absolvantur temporibus, tam semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. Et quod secundum curvas MA et AN oscillari officitur, oscillatio isochrona, etiamsi alternat semioscillationes, in quibus descensum MA incipit, aequalibus peraguntur temporibus. Haec composita MAN non est idonea ad pendulorum motum in motu aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium si casus determinaretur, quo curva AN similis et aequali prodiret.

PROPOSITIO 88

PROBLEMA

Curvae MA et AN (Fig. 87, p. 396) eam habuerint proprietatem, ut rationes, quae in curva MA incipiunt, sint inter se isochronae duplicata ratione celeritatum resistit, determinare casus, quibus coniunctae MA et AN unam curvam continuam constituunt.

SOLUTIO

His idem denominationibus, quas in praecedente propositione habuimus, ponamus $AP = x$, $AM = s$, $AQ = t$ et $AN = r$ atque $f =$ longitudini in vacuo et gravitate $= g$, invenimus ibi has duas aequationes

$$e^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{s}{2k}} = \sqrt{2f} \int e^{\frac{x}{2k}} dx \quad \text{et} \quad e^{\frac{t}{2k}} dt = e^{\frac{x}{2k}} dx,$$

ex utramque curvam continetur. Iam quia curvae MA et AN esse rami curvae continuae, aequatio inter x et s ita debet haberi, ut si x abeat in t , tum s fiat $= -r$ propter situm negativum. Accipiamus novam variabilem z , cuius s et x sint tales functiones, ut si x abeat in t et s in $-r$. Sit

$$\int e^{\frac{x}{2k}} dx = z^2;$$

$$ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{s}{2k}} = z\sqrt{2f};$$

in casu, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit

$$ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f};$$

quod in priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z , ut z^2 , etiam si loco z ponatur $-z$, et ponatur

$$ke^{\frac{x}{2k}} = -\frac{1}{2} z\sqrt{2f} + P;$$

quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negativum; ubi
 r atque habebitur

$$ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P \quad \text{ac} \quad ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-r}{2k}} = z\sqrt{2f},$$

nti requiritur. Alteri aequationi

$$\int e^{\frac{r}{k}} dt = \int e^{\frac{-r}{k}} dx$$

per haec

$$\int e^{\frac{-r}{k}} dx = z^2$$

iam satisfiet; posito enim z negativo et dt loco dx atque r loco

$$\int e^{\frac{r}{k}} dt = z^2 = \int e^{\frac{-r}{k}} dx.$$

Ex variabili ergo z , cuius P est functio quaecumque par, curva quae
 cuius continua est altera AN , ita determinatur, ut sit

$$e^{\frac{-r}{k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k} \quad \text{atque} \quad dx = 2e^{\frac{r}{k}} z dz = \frac{8k^2 z dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$$

Erit ergo

$$x = 8k^2 \int \frac{adz}{(2P - z\sqrt{2f})^2} \quad \text{et} \quad s = 2kl \frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}.$$

Sit

$$z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$$

tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem
 producendam, quia debet esse u unius dimensionis; erit ergo P
 ipsius u unius dimensionis quoque. Quare habebitur

$$s = 2kl \frac{k}{P - u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P - u)^2}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

800. Infinitae ergo curvae tantochronae MAN inveniuntur
 varii valores loco P , qui omnes sint functiones pares ipsius u , s

ero inter x et s obtinebitur, si ex duabus aequationibus inventis

$$s = 2kl \sqrt{P-u} \quad \text{atque} \quad x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P-u)^2}$$

, quae etiam in P inest, eliminetur.

COROLLARIUM 2

quia est $s = 2kl \sqrt{P-u}$, erit

$$ds = \frac{2k(du - dP)}{\sqrt{P-u}}$$

$$e^{\frac{1}{2}k} = \sqrt{P-u} \quad \text{son} \quad P-u = k e^{\frac{1}{2}k}$$

$$e^{\frac{1}{2}k} ds = \frac{2k^2(du - dP)}{(P-u)^2}$$

equatione si altera

$$dx = \frac{4k^2 u du}{f(P-u)^2}$$

, prodibit

$$\frac{e^{\frac{1}{2}k} ds}{dx} = \frac{f(du - dP)}{2u du}$$

tio ad eliminandum u est saepe commodissima.

SCHOLION 1

quia evanescente s quoque x evanescere debet, primum investi-
quo ipsi u dato valere s evanescat. Deinde integrale

$$\int \frac{u du}{(P-u)^2}$$

obet, ut evanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque
est cum in constructione curvae, quae opo duarum inventarum
perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s , si

quidem ea ex aequatione integrata

$$x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P-u)^2}$$

deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multiplica loco duarum inventarum aequationum adhiberi possunt istae

$$s = 2kl \frac{c}{P-u} \quad \text{et} \quad x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u du}{(P-u)^2},$$

ubi constans c est arbitraria et ideo ita determinari potest, casu evanescat, quo evanescit x . At s evanescit, si $u = 0$, quia

$$\int e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{2u^2}{f}$$

atque $\int e^{\frac{1}{2}x} dx$ evanescit evanescente s ; quare c aequalo esse debet P , si in eo ponatur $u = 0$. Eodem ergo casu x debet evanescere constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel talis functio par ipsius u accipi debet, quo fiat $u = c$, si ponatur

COROLLARIUM 3

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et gravitate atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent, nibus in vacuo, erit radius osculi curvae in $A = f$, si quidem f in A fuerit horizontalis.

EXEMPLUM 1

804. Quia P esse debet functio par ipsius u , sit P constans quo posito $u = 0$ fiat $s = 0$. Erit ergo

$$k - u = k e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{seu} \quad u = k(1 - e^{\frac{1}{2}x}).$$

Atque ob $dP = 0$ habebitur

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x} ds}{dx} = \frac{f}{2u} \quad \text{seu} \quad u = \frac{f e^{\frac{1}{2}x} dx}{2ds}.$$

Ex quibus aequationibus conficitur ista

$$\frac{f dx}{2} = k ds (e^{\frac{1}{2}x} - 1).$$

natio est pro ipsa tautochronea descensum; quae ultra M continetur tautochronam ascensum; atque omnes semioscillationes super hac continua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

EXEMPLUM 2

Sit

$$P = k + \frac{u^2}{a};$$

P eundem valorem facto u negativo. Hoc posito erit

$$k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{2k}$$

et $dP = \frac{2u du}{a}$ erit

$$\frac{a^{2k} ds}{dx} = \frac{f(a - 2u)}{2au},$$

aequatione prodit.

$$u = - \frac{f adx}{2(ae^{2k} ds + f dx)}.$$

Si u valor in altera aequatione substitutus dat

$$2fa^2e^{2k} dx ds = 4k(e^{2k} - 1)(ae^{2k} ds + f dx)^2 - f^2 ae^{2k} dx^2$$

tracta radice

$$\frac{ae^{2k} ds}{f dx} = \frac{ae^{2k}}{4k(e^{2k} - 1)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{2k}}{4k(e^{2k} - 1)} \left(\frac{ae^{2k}}{4k(e^{2k} - 1)} - 1 \right)}.$$

In casu speciali, si fuerit $a = 4k$, ista aequatio abit in hanc

$$\frac{4ke^{2k} ds}{f dx} = \frac{1 \pm e^{\frac{1}{2k}}}{e^{\frac{1}{2k}} - 1},$$

et aequationes in se complectitur, quarum altera est

$$\begin{aligned} f dx &= 4ke^{\frac{1}{2k}} ds (e^{\frac{1}{4k}} - 1) \\ &- f dx = 4ke^{\frac{1}{2k}} ds (e^{\frac{1}{4k}} + 1). \end{aligned}$$

Harum autem posterior, quia posito $s=0$ non evanescit dx et ob ipsius dx negativum, est inutilis. Prior vero integrata dat

$$fx = 16k^2 \left(\frac{e^{4k}}{3} - \frac{e^{2k}}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

seu

$$3fx = 8k^2 (2e^{\frac{3x}{4k}} - 3e^{\frac{x}{2k}} + 1).$$

Quae ultra A continuata hac aequatione exprimitur

$$3ft = 8k^2 (2e^{\frac{-3r}{4k}} - 3e^{\frac{-r}{2k}} + 1).$$

Per seriem vero habetur ista aequatio

$$fx = \frac{s^2}{2} + \frac{5s^3}{24k} + \frac{19s^4}{384k^2} + \text{etc.}$$

et pro altera curvae parte AN haec

$$ft = \frac{r^2}{2} - \frac{5r^3}{24k} + \frac{19r^4}{384k^2} - \text{etc.}$$

COROLLARIUM 4

806. Quia est

$$z^2 = \frac{2u^2}{f} = \int e^{\frac{-x}{k}} dx,$$

erit

$$u = \sqrt{\frac{1}{2} \int f e^{\frac{x}{k}} dx}.$$

Eliminato vero u est

$$P = k e^{\frac{x}{k}} + \sqrt{\frac{1}{2} \int f e^{\frac{x}{k}} dx}.$$

Quare si illo valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit aequatio inter s et x .

EXEMPLUM 3

807. Ponamus esse

$$P = \sqrt{k^2 + u^2} \quad \text{seu} \quad P^2 = k^2 + u^2;$$

et α^2 valoribus supra datis erit

$$\sqrt{2k} \int \sqrt{2f} e^{\frac{x}{k}} dx = k^2 \quad \text{son} \quad \sqrt{2f} \int e^{\frac{x}{k}} dx = k(e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}).$$

hinc oritur

$$\int \sqrt{2f} e^{\frac{x}{k}} dx = k^2 (e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}})^2 = k^2 (e^{\frac{2x}{k}} + e^{\frac{-2x}{k}} - 2).$$

hanc differentiatam dat hanc

$$dx = k ds (e^{\frac{x}{k}} - e^{\frac{-x}{k}}) \quad \text{son} \quad 2f dx = k ds (e^{\frac{2x}{k}} - 1),$$

hinc

$$2fx = \frac{k^3 e^{\frac{2x}{k}}}{2} - ks - \frac{k^2}{2}.$$

hinc conversam dat

$$fx = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3k} + \frac{s^4}{6k^2} + \frac{s^5}{15k^3} + \frac{s^6}{45k^4} + \text{etc.}$$

SCHOLION 2

In his exemplis invenimus curvas tautochronas pro medio, applicata ratione coloritatum, eae ita sunt comparatae, ut sint dissimiles. Cum igitur omnes descensus super curva sunt, sequentes semioscillationes, quae in curva NA incitantautochronae, id quod in causa est, quod hae curvae ad se accommodari nequeant. Huic autem incommodo rosi huiusmodi curvarum MA et NA par inveniretur, quae similes et aequales; hoc enim casu perinde super utraque pri possit. Dubium quoque nullum est, quin talis casus inventio, quia hae duae curvae forte non sunt continuae, propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curva respondens curva ascensuum similis et aequalis sit; haec ob defectum analyseos ita est difficilis, ut dubitem, num gnomin analyseos promotionem ad hunc scopum portingere

possit. Haec vero quaestio huc reducitur, ut investigetur
et x huius conditionis, ut, si in ea ponatur

$$-2kl\left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{1}{k} \sqrt{2f} \int e^{\frac{x}{k}} dx\right)$$

loco s et

$$\int \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} \sqrt{2f} \int e^{\frac{x}{k}} dx\right)^2}$$

loco x , eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante | § 788
haec multis modis facilius effici potest; attamen quomodo
non video. Si medium fuerit rarissimum, non difficile est
invenire, quo duae curvae MA et AN sint inter se similes
quidem ad finem perducto calculo hanc inveni aequationem

$$f dx = s ds + \frac{s^3 ds}{9k^2} \quad \text{seu} \quad f x = \frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{36k^2};$$

quae curva simul ultra A continuata ramum habet AN si
arctui AM ; quare pendulum in hac curva oscillans singulis
absolvit aequalibus temporibus. Erit autem

$$s^2 = -9k^2 + 3k\sqrt{9k^2 + 4fx} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{-9k^2 + 3k\sqrt{9k^2 + 4fx}}$$

Quia vero k est quantitas valde magna, erit

$$s = \sqrt{2fx} - \frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2} \quad \text{atque} \quad ds = \frac{f dx}{\sqrt{2fx}} - \frac{f dx}{18k^2}$$

Hincque fit

$$dy = dx \sqrt{f - \frac{2x}{2x}} - \frac{f^2 dx}{12k^2} \sqrt{f - \frac{2x}{2x}}$$

Ponatur $f = 2a$; erit

$$\begin{aligned} y &= \int dx \sqrt{a - \frac{x}{x}} - \int \frac{a^2 dx}{3k^2} \sqrt{\frac{x}{a-x}} = \int \frac{a dx - x dx}{\sqrt{(ax - xx)}} - \int \\ &= \left(1 + \frac{a^2}{3k^2}\right) \sqrt{(ax - xx)} + \left(1 - \frac{a^2}{3k^2}\right) \int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{(ax - xx)}} \end{aligned}$$

Quae ergo curva eodem fere modo quo cyclois describi
tionis circuli.

COROLLARIUM 5

si sumatur $a = k\sqrt{3}$ seu $f = 2k\sqrt{3}$, curva haec abit in ellipsin, horizontalis est duplo maior quam verticalis, qui est $= k\sqrt{3}$. Pieri, ut ellipsis sit tautochrone in fluido rarissimo atque magis satisfaciens cyclois.

SCHOLION 3

Constructio autem curvae tautochronae in medio rarissimo in praecedentio datae est, ut sequitur: Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ describatur semicirculus AOB et ex hoc super basi BD cyclois AFD ; in inverso situ describatur AGD . Quibus factis curva quaesita constructur sumendis ubique eius applicatis

$$PM = PF - \frac{a^2}{3k^2} PG;$$

curvae infinita puncta cognoscuntur. accipi potest

$$r = \left(1 + \frac{a^2}{3k^2}\right) PO + \left(1 - \frac{a^2}{3k^2}\right) AO,$$

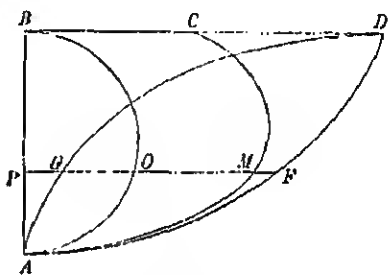


Fig. 88.

in medio non sit opus. Curva autem haec alicubi habebit tangentem seu applicatam PM maximam, quae invenitur posito $dy = 0$. Pro-

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2} \quad \text{seu} \quad x = \frac{3ak^2}{a^2 + 3k^2};$$

si AP aequalis capiatur, invenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89

PROBLEMA

In hypothesis gravitatis uniformis deorsum tendentis g data curva quaesita (Fig. 89, p. 412) pro descensibus in vacuo invenire curvam AM pro qua in medio resistente uniformi in duplicata ratione celeritatum huius omnes descensus super MA sint isochroni respective omnibus descensibus si celeritates in punctis imis a et A fuerint aequales.

SOLUTIO

Sit pro curva descensuum in vacuo $ap = t$, pro
pro curva vero descensuum in medio resistente sit $AP = x$ et AM

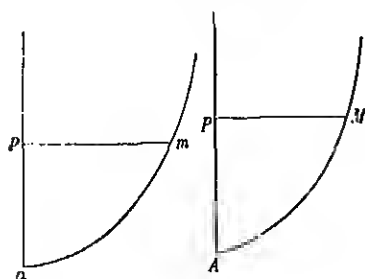


Fig. 89.

sistentiae vero exponens ponatur
considerentur binii descensus super
in quibus celeritates in A et
sint aequales et debitae altitud
ergo tempus descensus in vacuo

$$= \int \frac{dr}{V(b - gt)},$$

si post integrationem ponatur
pro tempore descensus in medio resistente super curva MA habet

$$\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} V(b - g \int e^{\frac{s}{2k}} dx)},$$

si item post integrationem ponatur

$$g \int e^{\frac{s}{2k}} dx = b.$$

Quamobrem haec tempora erunt aequalia, si fuerit

$$\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr \quad \text{et} \quad \int e^{\frac{s}{2k}} dx = t;$$

his enim positis pro utroque tempore habebitur eadem expressio

$$\int \frac{dr}{V(b - gt)}.$$

Cum igitur sit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando

$$2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = r \quad \text{atque} \quad e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k - r}{2k};$$

unde prodit

$$s = 2kl \frac{2k}{2k - r}.$$

aequatio $\int e^{\frac{r}{k}} dx = t$ dat

$$e^{\frac{r}{k}} dx = dt,$$

$$e^{\frac{r}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2},$$

substituto habetur

$$dx = \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2},$$

tur

$$x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}.$$

Aequatione inter t et r pro curva *am* ope duarum harum aequationis s et x per t et r determinantur, construi poterit curva quae. Aequatio vero inter x et s commodius inveniatur ex data aequatione inter t et r , si in ea loco r substituatur $2k(1 - e^{\frac{r}{k}})$ et $\int e^{\frac{r}{k}} dx$ loco t .

COROLLARIUM 1

Firca punctum infimum a , ubi t et r sunt quantitates evanescunt

$$s = r + \frac{r^2}{4k} \quad \text{et} \quad x = t + \int \frac{r dt}{k}$$

$$ds = dr + \frac{r dr}{2k} \quad \text{et} \quad dx = dt + \frac{r dt}{k}.$$

Inclinatio curvae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curvae

COROLLARIUM 2

Porro radius osculi in puncto infimo a , si tangens fuerit horizontalis, $\frac{r dr}{dt}$ et in A , quia tangens quoque erit horizontalis,

$$\frac{s ds}{dx} = \frac{r dr + \frac{3r^2 dr}{4k}}{dt + \frac{r dt}{k}}.$$

Erit ergo

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2 dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt} \left(1 - \frac{r}{4k}\right).$$

Quare ob r infinite parvum erit

$$\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}.$$

COROLLARIUM 3

814. Si ergo curva ma in a habuerit tangentem horizontalem curvae MA tangens in A quoque horizontalis atque radius osculi aequalis erit radio osculi in a .

COROLLARIUM 4

815. Si igitur in vacuo inventa fuerit curva ma , in qua temporum scensuum quaecunque habeant relationem ad celeritates in a : idem problema pro medio resistente solvetur curva MA , quae per ratione ex curva ma constructur.

COROLLARIUM 5

816. Si igitur curva ma fuerit cyclois seu tautochrone in vacuo erit tautochrone descensuum in medio resistente supra inventa. Per $r^2 = 2at$ seu $rdr = adt$ prodibit substitutis loco r et t inventis valor aequatio

$$2ke^{\frac{r^2}{2k}} ds \left(1 - e^{\frac{r}{4k}}\right) = ae^{\frac{r}{4k}} dx \quad \text{seu} \quad adx = 2kds \left(e^{\frac{r}{4k}} - 1\right).$$

EXEMPLUM

817. Sit am linea recta utenunque inclinata, ita ut sit $r =$ tempus descensus, quo celeritas altitudini b debita generatur,

$$= \int \frac{ndt}{V(b-gt)} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}.$$

Eandem ergo habebit proprietatem curva MA , ut tempus cuiusque in medio resistente, quo celeritas \sqrt{b} generatur, sit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ seu pro-

nti genitae. Cum autem sit $r = nt$, erit $dr = n dt$; in qua si loco valores inventi substituuntur, prodibit

$$e^{2k} ds = n e^k dx \quad \text{sen} \quad n dx = e^{2k} ds;$$

Aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraesentatur in fig. 86, p. 381, nempe curva CA , quae in A eam habet inclinationem recta data ma .

SCHOLIUM 1

Quomodo hic curva MA est determinata, super qua omnes in medio resistente iisdem absoluntur temporibus quibus descensus super curva ma , si celeritates ultimae in A et a fuerint aequales. modo curva MA potest deliniri, super qua omnes ascensus in medio resistente iisdem temporibus absoluntur quibus similes iisdem celeritatem habentes ascensus in vacuo super curva am . Nam cum in medio descensus in ascensum vertitur facto k negativo, si ponantur $AM = s$, habebitur

$$x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k + r)^2} \quad \text{et} \quad s = 2kl \frac{2k + r}{2k}$$

$$t = \int \frac{dx}{e^k} \quad \text{et} \quad r = 2k(e^{2k} - 1).$$

tam facile curva AM potest constari et aequatio pro ea inveniri.

SCHOLIUM 2

In hoc problemato ex curva descensuum in vacuo data determinatur curva descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim ex curva AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inveniri posse, si

$$r = 2k(1 - e^{-2k}) \quad \text{et} \quad t = \int \frac{dx}{e^k},$$

curvae am opo harum duarum aequationum perficitur. Aequatio pro curva am inter t et r commodius ex data aequatione inter x et s si in ea loco x substituatür $\int \frac{4k^2 dt}{(2k - r)^2}$ et $2kl \frac{2k - r}{2k}$ loco s . Quod de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo k negativum, uti in scholio 1 monuimus.

SCHOLIUM 3

820. Tradita hic inventio alterius curvae duarum am et A etiam locum habet, si datae curvae non habeatur aequatio, sed

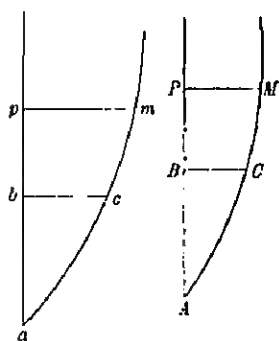


Fig. 90.

cunquē fuerit ducta; ex formulis enim constructio potest deduci, quae ab aequatione pendeat. Quamobrem cum in capite praecedenti in casum inciderimus pro vacuo, quo curvae invenimus cum data ac iungendam, ut omnes ex quovis puncto curvae cm usque ad A absolvantur temporibus, similia exemplum in medio resistente erui poterunt, quibus libere duarum diversarum curvarum compositio chrona. Si enim curva acm fuerit huiusmodi tautochrone pro vacuo, ex ea per solam

problematis similis curva composita pro medio resistente invenitur ex ac methodo tradita curva AC definiatur; qua inventa posito bP et $BP = x$ atque $CM = s$ et praeterea $ab = a$, $ac = c$ et $AB = A$ tum enim, cum data sit aequatio inter t et r , erit

$$AP = A + x = \int \frac{Ak^2 dt}{(2k - c - r)^2}$$

et

$$AM = C + s = 2kl \frac{2k}{2k - c - r}.$$

At si pro medio resistente data fuerit curva AC atque requiratur eius proprietatis, ut omnes descensus super MCA aequalibus temporibus, solutio non dissimili modo officietur. Nam ex data pro medio resistente inveniatnr curva eiusdem proprietatis pro scholien 2. Qua inventa quaeratur curva cm ei adiungenda, descensus in vacuo isochronos producat (§ 432). Denique methodo tradita ex curva composita acm pro vacuo quaeratur similis curva pro medio resistente ACM , cuius quidem pars AC iam est cognita ex ea lineam ac definivimus. Idem ergo problema, quod in vacuo se habebat difficultatis, in medio quoque resistente resolvitur. caput hoc finiens Lectorem benevolum rogo, ut, antequam ad caput progrediatur, quae in capite I ab § 58 usque ad finem capitis repetere velit.

CAPUT QUARTUM

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE

PROPOSITIO 90

PROBLEMA

821. *Data via in superficie quacunq^{ue} $Mm\mu$ (Fig. 91) invenire eius p^{er} respectu plani dati APQ et radii osculi illius viæ in M tam posit^{am} longitudinem nec non normalis in superficiem situm.*

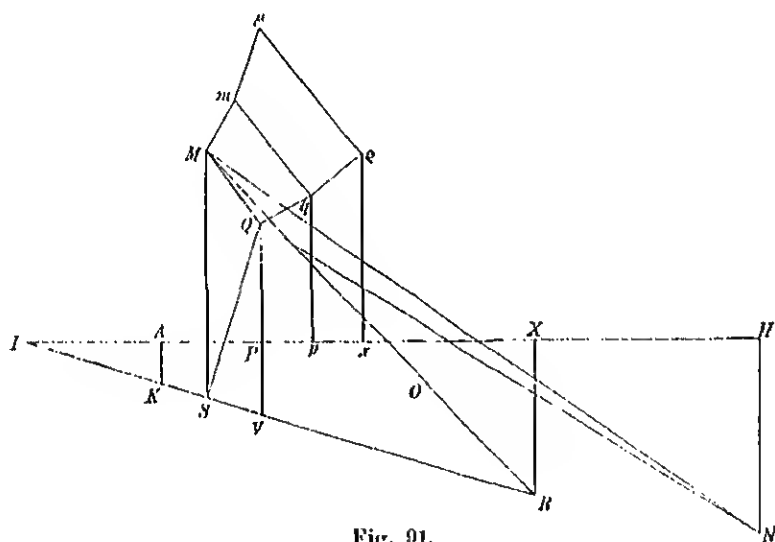


Fig. 91.

SOLUTIO

Sunto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP , quorum respectu
o curvae $Mm\mu$ sit determinanda, ex tribus punctis proximis M , m

ae viae in superficie in planum APQ demittantur perpendiculara MQ ,
 atque ex punctis Q, q, q ad axem AP perpendiculara QP, qp et
 sito nunc initio abscissarum in A sit $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$. Quae
 pro superficie data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens in
 his variabiles x, y et z ; quae aequatio sit haec

$$dz = Pdx + Qdy.$$

In hac aequatione si coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaecumque
 ista superficie existens; quare, cum linea $Mm\mu$ data ponatur, dabitur
 iter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curva $Mm\mu$
 terminatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa
 abscissae Pp , $p\pi = dx$ inter se aequalia seu sumatur elementum dx com-
 mune. Erit ergo

$$pq = y + dy, \quad \pi q = y + 2dy + ddy$$

que

$$qm = z + dz \quad \text{et} \quad q\mu = z + 2dz + ddz.$$

Si positus sit MN normalis in superficiem in puncto M et N punctum
 in hac normalis plane APQ occurrat; demittatur ex N in axem perpen-
 diculum NH ; erit

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y$$

68). Sit nunc MR positio radii osculi curvae $Mm\mu$ et R incidentia in
 planum APQ ; erit ex R in axem demisso perpendicularo RX

$$AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$$

que

$$XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$$

68). Longitudo vero radii osculi, scilicet MO ,

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{V(dx^2(dy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}$$

72). Donique concepiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm ,
 productum, donec planum APQ intersecet, sitque intersectio recta RKI ,

ecta perpendicularis in K occurrat et ex P in V ; inventum est

$$PV = \frac{zddy}{ddz} - y$$

um nunc sit $XR : PV :: AX - AP : PI$, erit

$$PI = \frac{(AX - AP) \cdot PV}{XR - PV}$$

$$AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy}$$

$$XR - PV = \frac{zddyddz(dx^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}$$

stituitis erit

$$PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dx^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)} = \frac{zdxddy - ydxddz}{dzddy - dyddz}$$

$$AI = PI - AP = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dzddy - dyddz}$$

ritur

$$AK = \frac{PV \cdot AI}{PI} = \frac{zdxddy - ydxddz - xdzddy + xdyddz}{dxddz}$$

o, in quo sita sunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ demittenda ex Q perpendiculari QS ad intersectionem RI ; erit
gens anguli inclinationis = $\frac{QM}{QS}$. At cum sit $IV : PI = QV : QS$,
angens

$$= \frac{QM \cdot IV}{PI \cdot QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$$

ro NMR , quem radius osculi cum normali in superficiem constituit,
st

$$= \frac{ddy(dx + Pdz) - ddz(Pdy - Qdx)}{(ddz - Qddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

ex his igitur omnia deduci possunt, quo ad positionem curvae
noscendam requiruntur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

822. Curvae $Mm\mu$ projectio in plano APQ est curva $Qq\varphi$, exprimitur aequatione inter x et y . Quare ista projectio habet aequationum $dz = Pdx + Qdy$ et eius, qua ipsa curva in superficie terminatur, nova formetur aequatio eliminanda variabili z , qua et y tantum.

COROLLARIUM 2

823. Simili modo, si eliminetur x , ut prodeat aequatio inter y et z , aequatione definitur projectio curvae $Mm\mu$ in plano, quod est axem AX . Atque aequatio, in qua non inest y , sed tantum x projectionem curvae $Mm\mu$ in plano, quod normaliter planum APQ axem AX intersecat.

COROLLARIUM 3

824. Curvae autem $Mm\mu$ natura ex duabus eius projectionibus planis invicem normalibus distincte cognoscitur. Qualem quoque suppeditat unica projectio una cum ipsa superficie.

COROLLARIUM 4

825. Quamobrem ad curvam in superficie data quancunque designandam requiritur, ut praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$, flectis determinatur, detur aequatio duas tantum variables involvens projectione quapiam curvae $Mm\mu$.

COROLLARIUM 5

826. Si superficies secetur plano, simili modo, quo conus et conicas producendas secari solet, curva ex hac sectione orta erit in plano. Quare his casibus tam positio rectae IR erit constans IMR inclinatio ad planum APQ .

EXEMPLUM

827. Si igitur detur superficies quancunque onque secetur plano, quaeratur curva hac sectione orta. Ad hoc ponatur $AI = a$,

tionis plani IMR ad planum APQ tangens $= m$; eritque

$$\frac{xddy-ydxddz}{xddy-dyddz} = x \quad \text{ob} \quad h = \frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+xdyddz}{dxddz}$$

$$m = \frac{\sqrt{(dx^2dz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}.$$

aequationibus coniunctis cum $dz = Pdx + Qdy$ natura curvae hac
bitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus

$$\frac{b}{a} = \frac{zddy - dyddz}{dxddz} \quad \text{seu} \quad ddz : ddy = adz : bdx + ady;$$

tionis integralis est

$$\frac{1}{a} \int dz = \frac{1}{a} \int (bdx + ady) = \frac{1}{a} \int c \quad \text{seu} \quad cdz = bdx + ady$$

$$cz = bx + ay + ff.$$

vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substitu-
dibil

$$\frac{bx dx + az dy - ay dz}{bdz} \quad \text{seu} \quad abd z + bxd z = bz dx + az dy - ay dz,$$

zz divisio integralis est haec

$$c \frac{ab}{z} = \frac{bx + ay}{z} \quad \text{seu} \quad cz = bx + ay + ab;$$

anto erat ff , hic est ab , seu $ff = ab$. Constantem vero c tertia
definiot; erit autem

$$m = \frac{dz \sqrt{(a^2 + b^2)}}{bdx + ady} \quad \text{seu} \quad \frac{dz \sqrt{(a^2 + b^2)}}{m} = ady + bdx.$$

superior littera

$$c = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{m}$$

atque praepter aequationem superficiei naturam exprimentem h

$$\frac{z\sqrt{a^2+b^2}}{m} = bx + ay + ab,$$

ex quibus natura quaesitae curvae est derivanda. Quia autem quaesita est in plano IMR , commodissime ea exprimitur a coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto ergo ex M in eum demittatur perpendicularum MS et vocetur $IS = u$. Est vero $IA : AK = IP : PV$ seu

$$PV = \frac{ab + bx}{a}$$

et

$$QV = \frac{ab + bx + ay}{a} = \frac{z\sqrt{a^2+b^2}}{ma}.$$

Porro est

$$\sqrt{a^2+b^2} : u = \frac{z\sqrt{a^2+b^2}}{ma} : QS;$$

quare erit

$$QS = \frac{z}{m} \quad \text{et} \quad SV = \frac{bx}{ma}.$$

Ex his prodibit

$$MS = u = \frac{z\sqrt{1+m^2}}{m} \quad \text{atque} \quad IS = t = \frac{m(a+x)\sqrt{a^2+b^2}}{ma}$$

Ex quo oritur

$$z = \frac{mu}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{et} \quad x = \frac{bu + at\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{a^2+b^2}(1+m^2)} - a$$

et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{a^2+b^2}}{m} = bx + ay + ab$

$$y = \frac{au - bt\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}(a^2+b^2)}.$$

His igitur valoribus loco x , y et z in aequatione superproveniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonales sitae.

COROLLARIUM 6

intersectio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat summa A , erit

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad y = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} \quad \text{et} \quad x = t.$$

COROLLARIUM 7

intersectio IR plani secantis IMR cum plano APQ fuerit normalis AX , erit $b = \infty$. Quare prodibunt

$$z = \frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}, \quad x = \frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}} - u \quad \text{et} \quad y = -t.$$

COROLLARIUM 8

si valores loco z , y et x substituendi sint unius dimensionis u , perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere solutiones quam ipsam aequationem inter z , y et x .

COROLLARIUM 9

ut si aequatio inter z , y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano sectiones conicae.

SCHOLION

Comment. Tom. III. ea dissertatio, in qua lineam brevissimam quacunque determinavi, tria praecipue superficierum genera summo erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda.¹⁾

vero generalis $dz = Pdx + Qdy$ dat superficies cylindricas, si P et Q tantum ab y et z pendent, ita ut aequationem pro hoc super-

Commentatio 9 (indicis ENESTROMIANI): *De linea brevissima in superficie quacunque puncta iungente*, Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1728), 1732, p. 110; Opera omnia, series I, vol. 25. P. St.

fieri in genere abscissa x non ingreditur, omnes enim sectiones parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio

$$dz = Qdy.$$

Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies, quae ducendis rectis ex singulis curvae cuiuspiam punctis ad punctum planum eius curvae sitam. Quae superficies hanc habent proprietatem, omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera l distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiibus, si quidem vertex coni fuerit in A , ita sunt comparatae, coniunctim ubique eundem dimensionum numerum constituent.

Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae conversione cuiuscunque curvae circa axem; qui axis si fuerit A constante aequatio inter y et z dabit circulum centri P . Quare : iis hanc habebit formam

$$dz = Pdx - \frac{ydy}{z} \quad \text{seu} \quad zdz + ydy = zPdx,$$

ubi Pz ab x tantum pendet; seu est

$$Q = \dots \frac{y}{z} \quad \text{et} \quad P = \frac{X}{z}$$

existente X functione ipsius x .

Quemadmodum autem in his superficiebus tornatis omnes sectiones normales sunt circuli, ita tales superficies concipi possunt, quarum sectiones normales sint curvae quaecunque similes. Tales superficies continebuntur proprietate generali, ut functio quaecunque ipsarum sit functioni eiusdem ubique dimensionum ipsarum y et z numeri dimensionum numerus fuerit n , aequationis $Pdx = Rdz + Qdy$ erit proprietas, ut sit

$$Rz + Qy = n \int Pdx \quad \text{vel} \quad Rdz + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}.$$

Ex quo, an data aequatio sit ad huiusmodi superficiem, statim co-

1) Vide notam p. 44. P. St.

PROPOSITIO 91

PROBLEMA

facie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea potentiis sollicitatum describit tam in vacuo quam in medio quo-

SOLUTIO

Nullis potentiis absolutis sollicitari ponitur, linea ab eo opta erit linea brevissima in vacuo (§ 62). Medii autem vim tantum immittit neque directionem ullo modo etiam in medio resistente via a corpore in quavis superpariter brevissima. Manentibus igitur ut ante $AP = x$, z (Fig. 91, p. 417) sit $dz = Pdx + Qdy$ aequatio superficiei atque Mm , $m\mu$ duo lineae brevissimae cuiuspiam eleora pro linea brevissima inventa est haec aequatio

$$Pdzddy + dxddy = Pdydz - Qdx dz$$

$$ddz = \frac{(Pdz + dx)ddy}{Pdy - Qdx}.$$

superficiem differentiatam dat

$$ddz = dPdx + Qddy + dQdy,$$

ut sit

$$\frac{dx}{1 + P^2 + Q^2} (dPdx + dQdy) \quad \text{et} \quad ddx = \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}.$$

Mm sequens $m\mu$ in linea brevissima invenietur; erit enim

$$PQ + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad q\mu = QM + 2dz + ddz$$

ddz valores sunt inventi. Quare hinc sequentis cuiusque determinatur atque ipsius lineae brevissimae natura per projectionem cognoscitur. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

834. Si in aequatione pro superficie P et Q tantum per x et y d
aequatio

$$ddy = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

projectionem lineae brevissimae in plano APQ denotat.

COROLLARIUM 2

835. Pro linea ergo brevissima $Mm\mu$ sumtis elementis axis ae
bus erit

$$mp = y + 2dy + \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

atque

$$mq = z + 2dz + \frac{(Pdz + dx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)},$$

ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et
gnoscitur.

COROLLARIUM 3

836. Quia pro linea brevissima angulus RMN evanescit (§ 71), in
 R in N ; positio ergo radii osculi ita se habebit, ut sit $AX = x +$
 $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii osculi erit [§ 73]

$$= \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy}.$$

COROLLARIUM 4

837. Planum vero IMR , in quo sita sunt elementa lineae breviss
 $Mm\mu$, ita determinabitur, ut sit

$$AI = -x + \frac{y(dx + Pdz) - z(Pdy - Qdx)}{Qdz + dy}$$

et

$$AK = -y + \frac{z(Pdy - Qdx) + x(dy + Qdz)}{dx + Pdz}.$$

vero anguli, quem planum IMR cum plano APQ constituit, erit

$$= \frac{V((dx + Pdz)^2 + (dy + Qdz)^2)}{Pdy - Qdx}.$$

anguli secans est

$$= \frac{V(1 + P^2 + Q^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdy - Qdx}$$

s

$$\frac{Pdy - Qdx}{V(1 + P^2 + Q^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

EXEMPLUM I

Sit superficies cylindrica quaecumque axem habens AP ; exprimetur a hac aequatione $dz = Qdy$ ovanoscento P in generali aequatione $dz = Pdx + Qdy$. Quare pro projectione lineae brevissimae huius superficies APQ habebitur ob $P = 0$ ob $dP = 0$ haec aequatio

$$ddy = \frac{QdQdy}{1 + Q^2}$$

$$l \frac{adx}{dy} = l V(1 + Q^2) \quad \text{ob} \quad adx = dy V(1 + Q^2),$$

Q tantum per y datur; at si Q per y et z datur, variabilis z est opo aequationis $dz = Qdy$. Ubi in cylindro circulari, in quo est $z^2 = a^2 - y^2$, erit

$$z = V(a^2 - y^2) \quad \text{ob} \quad Q = \frac{-y}{V(a^2 - y^2)}.$$

$$adx = \frac{ady}{V(a^2 - y^2)}.$$

autem $\int dy V(1 + Q^2)$ exprimit arcum sectionis ad axem AP normale dicte hoc arcu $= s$ erit $ax = s$. Ex quo intelligitur, si talis in planum explicetur, fore lineam brevissimam rectam; uti

839. Sit superficies proposita conica quaecunque verticem habens i
 aequatio pro tali superficie ita poterit adaptari, ut z aequetur functioni
 dimensionis ipsarum x et y . Quare in aequatione $dz = Pdx + Qdy$ lit
 P et Q erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x et y . Hanc ob
 uti iam alibi¹⁾ ostendi, erit.

$$Px + Qy = 0 \quad \text{sen} \quad Q = -\frac{Px}{y};$$

unde fiet

$$dQ = \frac{Pxdy - Pydx - yxdP}{y^2} \quad \text{et} \quad Pdy - Qdx = \frac{P(ydy + xdx)}{y}$$

atque

$$dPdx + dQdy = \frac{y^2 dPdx + Px dy^2 - Py dxdy - yxdPdy}{y^3} = \frac{(ydx - xdy)(y dP - Pdy)}{y^2}$$

et tandem

$$1 + P^2 + Q^2 = \frac{y^2 + P^2 y^2 + P^2 x^2}{y^2}.$$

Quibus substitutis erit

$$ddy = \frac{P(ydy + xdx)(ydx - xdy)(y dP - Pdy)}{ydx(y^2 + P^2 y^2 + P^2 x^2)}.$$

Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia
 functio nullius dimensionis ipsarum x et y . Erit vero

$$dy = p dx + x dp$$

et

$$\begin{aligned} ddy &= x ddp + 2 dx dp = - \frac{P(p^2 x dx + px^2 dp + x dx)(px dP - Pp dx - Pxdp)}{px^3 dx(p^2 + P^2 p^2 + P^2)} \\ &= - \frac{P dp(p^2 dx + px dp + dx)(Pp dx + Pxdp - pxdP)}{p dx(p^2 + P^2 + P^2 p^2)}. \end{aligned}$$

Ex qua aequatione quidem projectio difficulter cognoscitur. Quomodo a
 linea brevissima in tali superficie sit determinanda, fusius docui in Comm
 III. p. 120.²⁾ Ceterum idem de linea brevissima est notandum quod
 scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

1) Vide notam p. 44. P. St.

2) Vide notam p. 423. P. St.

SCHOLION

modo in determinandis lineis brevissimis super aliis super-
non hic immoror, quia in citato loco hanc materiam plenius
ior ergo ad investigationem linearum, quae in superficie a
cunque potentiis sollicitate describuntur. Antea vero necesse
s cuiusque potentia curatius inquiramus.

DEFINITIO 4

*Prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius di-
rectio ad ipsam superficiem, in qua corpus movetur.*

COROLLARIUM

vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout
deflectioni radii osculi lineae brevissimae vel contraria est vel
(§ 79).

DEFINITIO 5

*Deflectentem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius
directio a tangente et perpendicularis in viam a corpore*

COROLLARIUM

ergo vis corpus a linea brevissima, quam a nullis potentiis
traheret, deflectit et vel cis vel ultra eam detrahit pro eius
directio vel ultra tendente.

PROPOSITIO 92

PROBLEMA

*Examinare effectum vis prementis in corpus super superficie quacunque
directio a nullis potentiis sollicitatur.*

SOLUTIO

vis premens est normalis in superficiem ideoque eius directio
(. 417), ea neque celeritatem neque directionem motus afficiet,

sed tota in pressione superficiei consumetur; corpus igitur in eam
 progredietur, in qua, si haec vis abesset, moveretur; quae autem
 brevissima in propositione praecedente determinata. Movebitur
 in linea $Mm\mu$, cuius radius osculi MO incidet in normalem super-
 ficiei. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea
 versus interiora secundum MN premet. Ponatur haec vis pre-
 premetur ab ea superficies secundum MN vi $= M$. At si radius
 in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi aequa
 eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ sit linea brevissima
 osculi [§ 73]

$$MO = - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{dPdx + dQdy},$$

per quem si dividatur dupla altitudo v celeritati in M debita,
 centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua superficies secundum MN

$$= + \frac{2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} + M.$$

Positio tandem huius vis prementis per superiora [§ 68] inventa

$$MH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -Qz - y,$$

demisso scilicet ex puncto N , in quo normalis MN plano APQ
 axem perpendiculo NH . Q. E. I.

COROLLARIUM 1

846. Cum neque altera vis normalis deflectens neque vis
 neque vis resistentiae, si quae adest, pressionem in superficiem
 aspiciatur, a quibuscumque potentiis corpus praeterea sollicitetur
 semper tantum esse, quantum hic assignavimus.

COROLLARIUM 2

847. Quantumvis igitur via a corpore descripta a linea brevissima
 crepot, tamen pressio in superficiem fit secundum normalem in
 seu secundum radium osculi lineae brevissimae, non vero secun-
 dum curvae descriptae radium osculi, cuius longitudo etiam ad pro-
 bationem requiritur.

quare habetur

$$PP' = \frac{z dx}{dz} \quad \text{et} \quad AP' = \frac{z dx - x dz}{dz}.$$

Porro ob $dx : dy = \frac{z dx}{dz} : y - PT$ erit

$$PT = y - \frac{z dy}{dz},$$

ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

COROLLARIUM

850. Cum resistentia ad vim tangentialem sit referenda, exigitur, quomodo resistentiae effectus sit determinandus. Ut si stentia $= R$, erit

$$dv = -(T + R)V(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

PROPOSITIO 94

PROBLEMA

851. *Vis normalis deflectentis N effectum in corpus super superque motum determinare.*

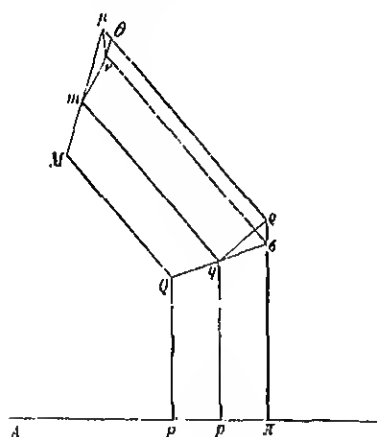


Fig. 93.

SOLUTIO

Positis ut ante $AP = x$, $QM = z$ (Fig. 93) exprimatur natura hac aequatione

$$dz = P'dx + Q'dy$$

et moveatur corpus celeritate debita per elementum Mm ; quod nisi vis deflectens adesset, per elementum $m\mu$ secundum viissimam foretque

$$nq = y + 2dy + \frac{(P'dy - Q'dx)(dP'dx + dQ'dy)}{dx(1 + P'^2 + Q'^2)}$$

$$Q\mu = z + 2dz + \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$$

medat vis normalis deflectens N , quae directionem habeat
ergo vis efficiet, ut corpus descripto elemento Mm non
sed ab hac directione antrosum deflectat. Ponamus igitur
erunt Mm et mv duo elementa curvae a corpore descriptae.
et v in planum APQ perpendicularo $v\sigma$ orit

$$\mu = y + 2dy + ddy \quad \text{et} \quad \sigma v = z + 2dz + ddz.$$

tur

$$\sigma Q = \frac{(Pdy - Qdx)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddy$$

$$\mu Q - v\sigma = \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} - ddz.$$

talis ergo

$$\frac{Pdx + dQdy}{1 + Q^2} = dd\eta \quad \text{et} \quad \frac{(dx + Pdz)(dPdx + dQdy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)} = dd\zeta$$

osculi angulo elementari $\mu m v$ respondens [§ 72]

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy + dyddz + dzdd\eta - ddy^2 + dx^2(dd\eta - ddy)^2 + dx^2(dd\zeta - ddz)^2}$$

tur $= r$, erit $N = \frac{2v}{r}$ seu $2v = Nr$, quia hic angulus eodem
quo corpus a vi normali in plano a linea recta deflectitur.

$$zdd\eta - dydd\zeta = \frac{(dy + Qdz)(dPdx + dQdy)}{1 + P^2 + Q^2}.$$

et $dd\zeta$ debitis valoribus substitutis fit

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dy^2 + ddz^2) + (dzddy - dyddz) - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dPdx + dQdy)^2}{1 + P^2 + Q^2}}$$

aequationem $dz = Pdx + Qdy$ sit

$$dPdx + dQdy = ddz - Qddy,$$

erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{-ddy(dx + Pd z) + ddz(Pdy - Qdx)}$$

Hanc ob rem erit

$$ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pd z) = \frac{N}{2v} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$$

Q. E. I.

SCHOLIUM 1

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (§ 79) pro effecta modi vis determinando invenimus. Differentia enim tantum est in significatione N , quam vim ibi negativo accipiendam esso apparet. Atque hic de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata hic extraximus, neque potest esse negativa ac affirmativa. Hoc vero cum si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur, quia eiusmodi esse debet, ut punctum ν cis μ cadat, si potentia N ambrosia posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radiceis quod determinavi atque hanc ipsam formulam inveni.

COROLLARIUM 1

853. Si vis deflectens N evanescat, corpus motum suum in lineam brevissimam continuabit; id quod ipsa aequatio quoque indicat. Posito $N = 0$ habebitur

$$ddy(dx + Pd z) = ddz(Pdy - Qdx),$$

quae aequatio est pro linea brevissima.

COROLLARIUM 2

854. Quaecumque ergo vis premens et vis tangentialis atque res corpus in superficie motum sollicitet, si modo nulla affuerit vis deflectens, corpus semper in linea brevissima movebitur.

SCHOLIUM 2

855. Quod autem ad positionem huius vis deflectentis N attinet, hoc deducetur, quod ea posita sit in plane tangente superficiem atque

to descriptao; sit ergo MG (Fig. 94) eius directio et G plano APQ occurrit, ita ut vis N secundum MG trahere eam ante antrosum

Primo ergo determinatio plani super-
sectio plani super-
tis cum plano APQ ,
 VQ ; haec vero in-
tangentes superficiem
usque producantur
quibus in planum
nea recta iungantur.
ons linea descripta,
superficiem quoque tan-
venimus,

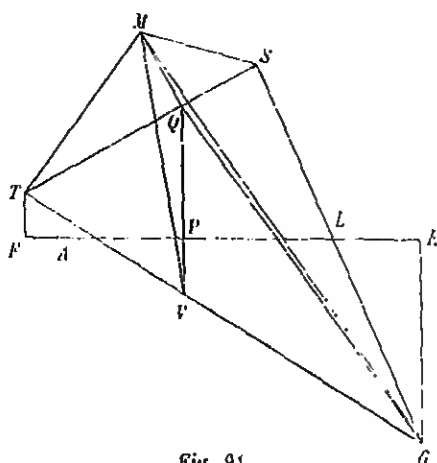


Fig. 94.

$$AP' = \frac{zdx}{dz} - x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{zdy}{dz}$$

superficies secta intelligatur plano PQM sitque MV sectionis
t

$$QV = \frac{s}{Q}$$

$= Pdx + Qdy$ posito $dx = 0$. Innotescit ergo punctum V ,
producta erit intersectio plani tangentis superficiem in M .
Punctum ergo G , in quo recta MG plano APQ occurrit,
cta TV . Porro in recta TQ sumatur

$$QS = \frac{sds}{V(dx^2 + dy^2)}$$

alis in elementum Mm descriptum. Atque si ad QS du-
t, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in-
perpendiculares. Quare cum MG sit quoque normalis in-
tum, punctum G quoque positum erit in recta SG . Punc-
n intersectione rectarum TV et SG . Est vero

$$PL = \frac{ydy + zdz}{dx}$$

et ang. $ELG = \text{ang. } PQT$. Ponatur $GE = t$; erit

$$LE = \frac{tdy}{dx} \quad \text{et} \quad PE = \frac{ydy + ldy + zdz}{dx}$$

Deinde etiam propter triangula similia est $EP:PT + PV = PE:GE$.
hoc est

$$\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} = \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy + ldy + zdz}{dx} : t = \frac{z}{Q} + y.$$

Hinc proveuit

$$t = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy} - y = GE \quad \text{et} \quad AE = x + \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy},$$

unde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG , erit

$$QG^2 = \frac{z^2(dx + Pdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2} + \frac{z^2(dy + Qdz)^2}{(Qdx - Pdy)^2}$$

et

$$QG = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dz^2(1 + P^2 + Q^2))}}{Qdx - Pdy}$$

atque ipsa

$$MG = \frac{z(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{Qdx - Pdy}.$$

PROPOSITIO 95

PROBLEMA

856. Si corpus super superficie motum a quocunque potentiis sollicitis finire vires normales, prementem scilicet et deflectentem, atque vim tang ex resolutione omnium ortam.

SOLUTIO

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes, eas ad tres reduci possumus quarum directiones sint secundum tres coordinatas x, y, z . Sit nunc corpus in M (Fig. 92, p. 431) secundum parallelam abscissae PA trahens vis secundum parallelam ipsi QP trahens $= P$ et vis secundum MQ $= G$. Singulae ergo hae vires resolvendae sunt in ternas, normale

scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E , F et G vires et tangentiales prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem virium directiones cum istis constituunt.

Primum a vi tangentiali, cuius directio est MT , existente

$$AR = \frac{z dx}{dz} = x \quad \text{et} \quad FT = y - \frac{z dy}{dz}$$

$$QT = \frac{z \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz} \quad \text{et} \quad MT = \frac{z \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dz}$$

cosinus anguli QMT , quem directio vis G cum vi tangentiali con-

$$= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

si ducatur vis G , prodibit vis tangentialis ex ea orta

$$= \frac{G dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

vero anguli, quem MT constituit cum directione vis F , quae est parallela, est

$$\cos. PQT, \sin. QMT = \frac{PQ - FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

tangentialis ex F orta est

$$= \frac{F dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

terro anguli, quem directio vis E constituit cum MT , est

$$= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

is tangentialis ex vi E orta

$$= \frac{E dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

initio princeps: $\int QMT$; vide notam p. 62 T. I. P. St.

Iam consideretur (Fig. 91, p. 417) vis promens, cuius directio existente

$$AH = x + Pz \quad \text{et} \quad HN = -y - Qz$$

seu

$$PH = Pz \quad \text{et} \quad QP + HN = -Qz.$$

Ex quo erit

$$QN = z\sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad MN = z\sqrt{1 + P^2 + Q^2}.$$

Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus

$$\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$$

ideoque vis promens ex G orta

$$= \frac{G}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}.$$

Porro anguli, quem directio vis F , quae est parallela ipsi QP , constituit, cosinus est

$$= \cos. PQN. \sin. QMN^1) = \frac{(PQ + HN)QN}{QN \cdot MN} = -\frac{Q}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}.$$

Ergo vis promens ex vi F orta est

$$= -\frac{FQ}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}.$$

Atque simili modo (Fig. 94, p. 435) vis promens ex vi E orta est

$$= -\frac{EP}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}.$$

Donique cum vis deflectentis directio sit MG atque

$$PE = \frac{z(dy + Qdz)}{Qdx - Pdy} \quad \text{et} \quad QP + EG = \frac{z(dx + Pdz)}{Qdx - Pdy},$$

erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus

$$= \frac{Qdx - Pdy}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + P^2 + Q^2}};$$

1) Editio princeps: $\angle QMN$. P. St.

$$\frac{G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

, quem MG cum directione vis F constituit, cosinus est

$$\frac{PQ + EG}{MG} = \frac{dx + Pdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}};$$

vis deflectens ex vi F orta est

$$\frac{F(dx + Pdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

guli, quem directio vis E cum MG constituit, cosinus est

$$\frac{PE}{MG} = \frac{-dy - Qdz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

deflectens ex vi E orta est

$$\frac{-E(dy + Qdz)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

ultam autem vim tangentialem vocaverimus T , vim prementem $= M$ et
centrifugam $= N$, ad has vires tres propositas E , F et G reduximus;

$$T = \frac{E dx + F dy + G dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$$

$$M = \frac{-EP - FQ + G}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

$$N = \frac{-E(dy + Qdz) + F(dx + Pdz) + G(Qdx - Pdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

COROLLARIUM 1

Si igitur corpus a tribus potentiis E , F et G sollicitetur, erit
pro altitudine debita celeritati in M

$$dv = -E dx - F dy - G dz$$

(§ 849), si loco T ponatur vis tangentialis ex resolutione potentiae et G orta.

COROLLARIUM 2

858. Si praeterea corpus in medio resistente moveatur atque in M fuerit $= R$, erit [§ 850]

$$dv = -E dx - F dy - G dz - R \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

COROLLARIUM 3

859. Si in aequatione § 851 inventa, in qua effectus vis deflexae est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione E , F et G orta, prodibit

$$\begin{aligned} & \frac{2vddz(Pdy - Qdx) - 2vddy(dx + Pd z)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= -E(dy + Qdz) + F(dx + Pd z) - G(Pdy - Qdx). \end{aligned}$$

COROLLARIUM 4

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus conflatur una alia prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz = Pdx + Qdy$ determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

COROLLARIUM 5

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam tam ex vi normali premente M quam ex vi centrifuga orta est

$$= \frac{(G - EP - FQ)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2v(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$$

(§ 845) substituto loco M valore invento.

COROLLARIUM 6

862. Est vero ex aequatione corollario 3 inventa

$$2v = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(F(dy + Qdz) - F(dx + Pd z) + G(Pdy - Qdx))}{-ddz(Pdy - Qdx) + ddy(dx + Pd z)}$$

ibi substituto prodibit tota pressio

$$\frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)V(1 + P^2 + Q^2)}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pd z)}$$

SCHOLION

Si tres potentiae E , F , G directiones habent invicem normales, a iis aequivalens $= V(E^2 + F^2 + G^2)$. His vero tribus viribus invenimus tres M , N et T , quarum directiones sunt quoque normales; quare istis tribus aequivalens vis erit $= V(M^2 + N^2 + T^2)$. Si loco M , N et T substituamur valores inventi ex E , F et G , est quoque $V(E^2 + F^2 + G^2)$; id quod calculo instituto re ipsa se ostendetur. Inservit autem hoc instar probationis, utrum calculus hanc resolutio est absoluta, recte fuerit institutus, an vero vero probatione instituta reperiantur se hac formulae recte habere.

PROPOSITIO 96

PROBLEMA

Sub hypothesis gravitatis uniformis et deorsum directae g determinare corpus super quacunque superficie proiectum in vacuo describit.

SOLUTIO

Q (Fig. 92, p. 431) planum horizontale et M punctum tam in ta quam in linea a corpore descripta. Erit ergo MQ verticalis et directio vis gravitatis g . Positis $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$ ione superficiei naturam exprimente $dz = Pdx + Qdy$ sit celeritas elementum Mm percurritur, debita altitudini v . Cum igitur hoc sit casus praecedentis, fit enim $G = g$, $E = 0$ et $F = 0$, haec duae aequationes

$$dv = -g dz$$

$$- Qdx) - 2vddy(dx + Pd z) + g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

[§ 859]. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum in planum horizontale APQ perveniret, $= b$; erit

$$v = b - gz.$$

Per alteram vero aequationem est

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ddy(dx + Pdz) - d dz(Pdy - Qdx)}.$$

Unde erit

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dz d dz(Pdy - Qdx) - dz d dy(dx + Pdz)}{(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Quae aequatio ope aequationis $dz = Pdx + Qdy$ transmutatur in

$$\frac{dv}{2v} = \frac{dy d dy + dz d dz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} - \frac{P d dy}{Pdy - Qdx};$$

quae integrata dat

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \int \frac{P d dy}{Pdy - Qdx}.$$

In quovis ergo casu speciali investigari debet, an

$$\frac{P d dy}{Pdy - Qdx}$$

integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in di-
primi gradus; atque cum sit $v = b - gz$, orietur aequatio differo-
gradus curvae descriptae naturam exprimens. Prossio vero in
secundum normalem erit

$$= \frac{g dx d dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}{d dz(Pdy - Qdx) - d dy(dx + Pdz)},$$

quae sublati differentialibus secundi gradus [§ 861] abit in hanc

$$\frac{-g}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} - \frac{2(b - gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

865. Celeritas ergo corporis in hypothesi gravitatis uniformi
sum directae in superficie quacunque moti ex sola altitudine cog-
noscitur ut si corpus in eodem plano moveretur.

COROLLARIUM 2

impusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt , erit

$$dt = \frac{V(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Vv}$$

ergo inventam erit

$$t dt = \int \frac{P dy}{P dy - Q dx} \quad \text{atque} \quad \frac{ddt}{dt} = \frac{P dy}{P dy - Q dx}$$

COROLLARIUM 3

inventis aequationibus reperietur

$$\frac{(P dy - Q dx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2 dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dP dx + dQ dy)(P dy - Q dx)}{(1 + P^2 + Q^2) dx}$$

$$+ \frac{Q(P dy - Q dx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2 dx(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} + \frac{(dP dx + dQ dy)(dx + P dz)}{(1 + P^2 + Q^2) dx}$$

$$= \frac{gP(P dy - Q dx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2(b - gz)(1 + P^2 + Q^2)} - \frac{(dP dx + dQ dy)(dy + Q dz)}{1 + P^2 + Q^2}$$

descriptio radius osculi erit

$$\frac{2(dx^2 + dy^2 + dz^2)(b - gz)V(1 + P^2 + Q^2)}{(P dy - Q dx)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 4(b - gz)^2(dP dx + dQ dy)^2}$$

SCHOLIUM

in formularum usum in casibus particularibus, quibus certa superficies consideratur, in sequentibus problematis fusius singularem superficierum exempla adiungemus.

PROPOSITIO 97

PROBLEMA

hypothesi gravitatis uniformis decursum tendentis g determinare motum superficiei cuiuscunque cylindri, cuius axis sit verticalis.

SOLUTIO

cylindri ponitur verticalis, erunt omnes sectiones horizontales; sit igitur $ABQC$ (Fig. 95, p. 444) basis cylindri, in cuius

superficie movetur corpus. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$ sitque z corporis
tando super puncto Q in superficie cylindri. Natura ergo huius super-
cylindricae hac exprimitur aequatione $0 = Pdx +$
seu $Qdy = -Pdx$. Haec autem aequatio oritur
generali $dz = Pdx + Qdy$, si P et Q fiant quantitates
infinite magnae, seu evanescente coefficiente ipsius
si quem assumsissemus. Quamobrem in aequatione
ante inventis P et Q quasi quantitates infinite ma-
considerari debent, etiamsi sint limitae magnitudines.
Erunt autem P et Q functiones ipsarum x et y
tum neque in iis inerit z . His ergo in calculum deductis habebitur

$$v = b - gz$$

atque

$$2v = \frac{g(Pdy - Qdx)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{Pdzddy - Pdyddx + Qdxddz} = \frac{g(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dydzddy - dy^2ddz - dx^2ddz}$$

propter analogiam $P:Q = dy:-dx$. At posterior aequatio logarithmica

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \int \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - l(dx^2 + dy^2)$$

Unde fit

$$\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gz}{c} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2}$$

Hinc oritur

$$(b - c - gz)(dx^2 + dy^2) = cdz^2$$

seu

$$V(dx^2 + dy^2) = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b - c - gz)}},$$

cuius integralis est

$$\int V(dx^2 + dy^2) = -\frac{2\sqrt{c}(b - c - gz)^{1/2}}{g},$$

ubi $\int V(dx^2 + dy^2)$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum.
Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur dt , erit

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{dyddy}{dx^2 + dy^2} \quad \text{atque} \quad \alpha dt = V(dx^2 + dy^2)^{3/2}$$

1) Editio princeps: $\int V(dx^2 + dy^2) = -\frac{\sqrt{c}(b - c - gz)}{g}$. Corroxit P. St.

2) Ex aequatione $\frac{v}{c} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2}$ sequitur constantem α esse $= \sqrt{c}$. P. St.

$$\alpha t = \int \sqrt{V(dx^2 + dy^2)}.$$

erunt proportionalia arcibus in basi respondentibus.
autem

$$\int \sqrt{V(dx^2 + dy^2)} = - \frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$$

tem pro curva in superficie cylindrica descripta, si haec super-
ficies concipiatur explicata; denotabit enim tum $\int \sqrt{V(dx^2 + dy^2)}$
axe horizontali et z applicatum verticalem. Projectionem vero
hanc in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante
prope aequationis $Pdx + Qdy = 0$ eliminetur y , ut prodeat
in x et z , quae erunt coordinatae huius projectionis. Scilicet ob
hanc

$$V(dx^2 + dy^2) = \frac{dx}{Q} \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\int \frac{dx \sqrt{P^2 + Q^2}}{Q} = - \frac{2\sqrt{c(b-c-gz)}}{g},$$

loco y eius valor in x debet substitui.

Pro, quam superficies sustinebit, a sola vi centrifuga oriatur
autem g in ipsa superficie sitam critico

$$= \frac{2(b-c-gz)(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2) \sqrt{P^2 + Q^2}},$$

ab axe cylindri recedendo conabitur, si haec expressio fuerit
E. I.

COROLLARIUM 1

ut ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si super-
ficies explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet projectoriam,
proiectum in plano verticali describeret.

COROLLARIUM 2

Motus corporis super superficie cylindrica compositus conside-
ratur in plano verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex

horizontalis, erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, i. e. arcibus horizontali motu percursis. Motus verticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

COROLLARIUM 3

872. Si ergo motus horizontalis evanescit, corpus recta vel ascendit vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus accidit, si fuerit $c = 0$, quo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ evanescit.

EXEMPLUM

873. Sit basis cylindri circulus, cuius quadrans sit BQC et radius $AB = a$. Sit $x^2 + y^2 = a^2$ et $x dx + y dy = 0$. Fiet ergo $P = x$ et $Q = y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Projectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticis AC erecto exprimitur aequatione

$$\int \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{2\sqrt{c(b - c - gs)}}{g}.$$

Si ergo fuerit $c = 0$, fiet $dx = 0$ atque $x = \text{constanti}$; quare hoc casu projectio erit linea recta. Curva vero, quae est projectio pro quocunque ipsius valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet, est

$$= \frac{2(b - gs)(dx^2 + dy^2)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} a} = \frac{2c}{a}$$

propter aequationem

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{b - gs}{c}.$$

quare pressio ubique erit constans et ipsi c proportionalis.

COROLLARIUM 4

874. Propter eandem aequationem erit generalitor pressio, quam cylindricus quicunque sustinet,

$$\frac{2c(dPdx + dQdy)}{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(P^2 + Q^2)}} = \frac{2Q^2c(dPdx + dQdy)}{dx^2(P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2Qc(QdP - PdQ)}{dx(P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

SCHOLION

solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica motus facile potest determinari, sed etiam, si cylindri axis verticalis, eadem facilitate motus corporis cognoscetur. Namque si ponat motum horizontalem iuxta axem cylindri, corpus perpetuo cylindri sectione permanebit in eaque movebitur tanquam super plano; vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus motus facile cognoscetur.

PROPOSITIO 98

PROBLEMA

Corpus moveatur in superficie solidi rotundi, cuius axis est verticalis in vacuo a gravitate uniformi g sollicitatum, determinare motum cuiusvismodi superficie.

SOLUTIO

solidum rotandum conversione curvae AM circa axem verticalem omnes eius sectiones horizontales circuli, quorum radii sunt ab axe AM . Aequatio ergo naturam motus exprimens erit

$$dz = \frac{xdx + ydy}{Z}$$

functionem quancunque ipsius z ;

$$Zdz = x^2 + y^2 = LM^2.$$

aequatio pro curva AM inter

$M = \sqrt{2} \int Zdz$, dabitur quoque Z . His praëmissis erit itaque

$$P = \frac{x}{Z} \quad \text{et} \quad Q = \frac{y}{Z};$$

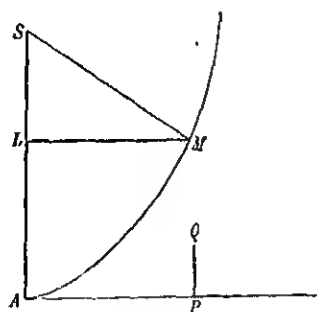


Fig. 96.

qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes tam curva descripta quam motus super ea cognoscetur

$$v = b - gz$$

atque

$$lv = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2 \int \frac{xddy}{xdy - ydx} = l(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2l(xdy - ydx)$$

Quare erit

$$v = \frac{c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(xdy - ydx)^2} = b - gz.$$

Ponatur $x^2 + y^2 = u^2$; erit u functio quaedam ipsius z , nempe

$$u^2 = 2 \int Z dz,$$

atque superior aequatio abibit in hanc

$$V(dx^2 + dy^2) = \frac{V(c^2 dz^2 + u^2 du^2(b - gz))}{V(u^2(b - gz) - c^2)}.$$

Projectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y si ex aequatione $x^2 + y^2 = 2 \int Z dz$ valor ipsius z in x et y sub huiusque projectionis arcus est $\int V(dx^2 + dy^2)$. In plano autem habebitur projectio eliminanda y ; quo facto prodit aequatio

$$\frac{u dx - x du}{c \sqrt{c(u^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{du^2 + dz^2}{u^2(b - gz) - c^2}},$$

quae aequatio, si per u dividatur, constructionem admittit. Prosequamur superficies sustinet axem versus, erit

$$= \frac{-gZ}{V(x^2 + y^2 + Z^2)} - \frac{2c^2 Z(dx^2 + dy^2) - 2c^2 dZ(xdx + ydy)}{Z(xdy - ydx)^2 V(x^2 + y^2 + Z^2)}.$$

Q. E. I.

COROLLARIUM 1

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absolvitur, ponatur

$$\frac{ddt}{dt} = \frac{xddy}{xdy - ydx},$$

lis est

$$\alpha dt = xdy - ydx.^1)$$

tempus erit ut

$$xy - 2 \int y dx$$

ydx aream projectionis in plano horizontali.

COROLLARIUM 2

corpus in projectione in plano horizontali moveri concipiatur, eius in Q debita altitudini

$$\frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{(ydx - xdy)^2},$$

in projectione ipso motus in superficie invenietur.

COROLLARIUM 3

igitur BQC (Fig. 97) projectio curvae in plano horizontali, in corpus, ita ut motus eius respondeat motui corporis in superficie, tempus, quo arcus BQ absolvitur, ut

$$\frac{xy}{2} - \int y dx$$

ut

$$\int y dx = \frac{xy}{2},$$

BAQ ducta radio AQ .

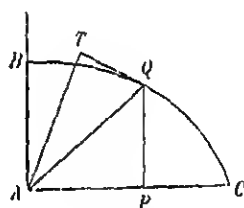


Fig. 97.

COROLLARIUM 4

ergo autem BAQ elementum est

$$\frac{ydx - xdy}{2}.$$

ratione § 876 $v = \frac{c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(x dy - y dx)^2}$ sequitur constantem α esse $= c/v$. P. St.

Opera omnia II: Mechanica

Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculari

$$AT = \frac{ydx - xdy}{V(dx^2 + dy^2)}.$$

Quare altitudo celeritati in Q debita est

$$= \frac{c^3}{AT^2} = \frac{c^3}{p^2}$$

posito $AT = p$.

COROLLARIUM 5

881. Corpus ergo in projectione motum perinde in ea movi libere moveretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A .

COROLLARIUM 6

882. Respondent punctum B motus in superficie facti in A detur directio prima motus in superficie, dabitur perpendicularum in B . Sit ergo $AB = f$ et perpendicularum in tangentem $= h$; celeritati in B debita $= \frac{c^3}{h^2}$.

COROLLARIUM 7

883. Vis ergo centripeta versus A tendens, quae faciet, projectione BQC libere moveatur, erit

$$= \frac{2c^3 dp}{p^3 du}$$

posito u pro $V(x^2 + y^2)$. Aequatio vero inter u et z exprimitur, cuius conversione genita est superficies proposita, ideoque

COROLLARIUM 8

884. Est porro

$$V(dx^2 + dy^2) = \frac{u du}{V(u^2 - p^2)} \quad \text{et} \quad ydx - xdy = \frac{p u du}{V(u^2 - p^2)}$$

$$p^2 = \frac{c^3 u^2 (du^2 + dz^2)}{c^3 dz^2 + u^3 du^2 (b - gz)}.$$

COROLLARIUM 9

885. Huius ergo quantitatis

$$-\frac{c^3 dz^2 + u^3 du^2 (b - gz)}{u^2 (du^2 + dz^2)}$$

differentiale per du divisum dabit vim contripetam in A requisitam, ut corpus projectione BQC moveatur libere, motu respondente motui corporis in effluvio.

COROLLARIUM 10

886. Si $c = 0$, fiet quoque $p = 0$. Quare hoc casu projectio in plano horizontali erit recta per A transiens, super qua corpus ad A accedens ita trahetur, ut sit vis contripeta

$$\frac{1}{du} d. \frac{-du^2 (b - gz)}{du^2 + dz^2}.$$

COROLLARIUM 11

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis, tangens in B ad AB et normalis ideoque $h = f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis est celeritati in projectione; quare si fuerit i valor ipsius z , si est $u = f$,

$$b - gi = \frac{c^3}{f^2}.$$

COROLLARIUM 12

888. Si praeteron vis contripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curva BQC erit circulus et propterea ipsa quoque curva in superficie

descripta atque motus tam in superficie quam in projectione a
ubi est $u = f$ et $z = i$, $dz = mdu$; erit ob $p = f$ et $u = f$ et
quo circulus describitur,

$$2c^3 = gmf^3.^1)$$

COROLLARIUM 13

889. Si ponatur $\pi : 1$ ut peripheria ad diametrum, erit
peripheria $= 2\pi f$, quae divisa per celeritatem V_{f^3} , i. e. V_{gmf}
minus periodi in circulo, quod ergo erit

$$= \frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$$

Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas
 $= \frac{f}{m}$ in eadem gravitatis hypothesis.

COROLLARIUM 14

890. In superficie ergo, quae generatur conversione curvae
(p. 447) circa axem verticalem AL , corpus proiectum circuli
describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis
 LS integram oscillationem absolvit.

COROLLARIUM 15

891. Si ergo curva AM fuerit parabola, omnes periodi
horizontales in conoide parabolica aequalibus absolventur tem-
penduli iisdem temporibus oscillationes integras peragentis lo-
bitur dimidia parti parametri.

SCHOLION 1

892. Quaecunque assumatur curva AM , si vis contripeta
lectione versus A ex data formula definiatur eaquo aequalis po-
fugao atque coniungatur cum aequatione $b - gi = \frac{c^3}{f^3}$, prodibit

$$2c^3 = gmf^3;$$

1) Vide demonstrationem § 892 datam. P. St.

min casu tam projectio erit circulus quam ipsa curva in superficie
 pla. Quo vero hoc melius appareat, ponatur $dz = qdu$ provenietque
 vis centripeta

$$= \frac{2qdq(bu^2 - gzu^2 - c^3)}{u^3 du(1 + q^2)^2} + \frac{2c^3 q^2 + gqu^3}{u^3(1 + q^2)}.$$

ponatur $u = f$, $z = i$ et $b f^3 = g f^2 i + c^3$ atque $q = m$; erit vis centripeta

$$= \frac{2c^3 m^2 + g m f^3}{f^3(1 + m^2)};$$

is posita vi centrifugae $\frac{2c^3}{f^4}$ dat

$$2c^3 = g m f^3.$$

EXEMPLUM

93. Sit superficies conica circularis seu AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449)
 recta utcumque inclinata ad axem AL ; quare erit $z = mu$ et $dz = mdu$.
 ergo centripeta ad A tendens, quae faciet, ut corpus libere in projectione
 moveatur, erit

$$= \frac{2c^3 m^2 + g m u^3}{u^3(1 + m^2)}.$$

ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distan-
 tia centro A proportionali. Si $c = 0$, tunc projectio erit linea recta
 transiens atque vis centripeta erit $= \frac{g m}{1 + m^2}$ sive constans. Corpus
 motu aequabiliter accelerato ad A accedet; motus vero in superficie
 congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque
 aequabiliter acceleratus. Sin autem projectio fuerit curvilinea et tan-
 gens in B normalis ad AB , erit $i = m f$ atque

$$b = g m f = \frac{c^3}{f^3}$$

$AB = f$. Erit ergo hoc casu

$$b = \frac{c^3 + g m f^3}{f^3},$$

si corpus in circulo horizontali revolvitur, erit insuper

$$2c^3 = g m f^3.$$

ut ergo hoc accadat, debet esse celeritas corporis debita altitudini

$$\frac{c^3}{f^2} = \frac{gmf}{2}.$$

atque periodi in hoc circulo iisdem absolventur temporibus, quibus pendulum longitudinis $\frac{f}{m}$ integras oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, verumamen

$$b = \frac{c^3 + gmf^3}{f^3},$$

curva BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed projectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3 , erit curva quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per propositionem 91 libri praecedentis determinatur. Quoniam enim vis centripeta est

$$\frac{2c^3m^3 + gmu^3}{u^3(1+m^2)},$$

haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^2}$, ob $y = u$ erit

$$P = \frac{2c^3m^3 + gmu^3}{1+m^2} \quad \text{atque} \quad \frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^3 + gmu^3} \quad \text{atque} \quad \frac{Pdy}{y dP} = \frac{2mc^3 + gu^3}{3gu^3};$$

deoque posito $u = f$ distabit quoque linea absidum a praecedente abside angulo

$$180 \sqrt{\frac{2mc^3 + gf^3}{3gf^3}} \text{ grad.}$$

Quoniam autem proximo est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $= 180 \sqrt{\frac{m^3+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^3+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$, erit angulus inter duas absides interceptus maior quam $103^\circ 55'$.

SCHOLIUM 2

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationem sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movabitur et vel circulos describit vel alias curvas non parum elegantes, quomadmodum cui

motum motuienti immolet. Causa quidem, quo pendulum circulos
 . . . vel non HUYGENIO in Act. Lips. A. 1715 iam est expositus sub
 motum turbatorum¹⁾ At si curva non fuerit circulus, nemo, quantum
 penduli motum vel consideravit vel determinavit.²⁾

DEFINITIO 6

Motus turbatorum vocatur penduli non in plano verticali impulsus motus.
 hoc casu pendulum non in eodem plano verticali movetur, sed curvam
 describit in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa penduli
 . . .

PROPOSITIO 99

PROBLEMA

*Penduli vel motus turbatorum incitati determinare motum et lineam
 . . . quae in superficie sphaerica describit.*

SOLUTIO

Linea compo. motum pendula est alligatum, in superficie sphaerica move-
 . . . est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius
 . . .

$$z = a - \sqrt{a^2 - u^2}$$

etiam . . . *AM* Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449). Erit ergo

$$y = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{a^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2ydy}{a^2 du} = \frac{2a^2}{u(a^2 - u^2)^2}$$

¹⁾ H. HUYGENIUS, *De vento turbationis inventa nova*, Acta erud. 1715, p. 242; *Opera*
 . . . 2, *De curvis et clivis* 1712, p. 187; vide etiam Chr. HUYGENS, *Horologium oscil-*
 . . . Paris 1673, Pars V, *De curvis*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 185. P. St.
²⁾ I. NEWTONUS hoc problema considerasse nec non solutionis compotem fuisse verisimile
 . . . *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londini 1687, Lib. I, sect. X prop. LV
 . . .

ut ergo hoc accidat, debet esse celeritas corporis debita altitudini

$$\frac{c^2}{f^2} = \frac{gmf}{2}.$$

Atque periodi in hoc circulo iisdem absolventur temporibus, quibus pendulum longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^2 = gmf^2$, verumtamen

$$b = \frac{c^2 + gmf^2}{f^2},$$

curva BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proinde haec non erit circulus. At si $2c^2$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^2 , curva quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positi per propositionem 91 libri praecedentis determinatur. Quoniam enim centripeta est

$$\frac{2c^2m^2 + gmu^2}{u^2(1+m^2)},$$

haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^2}$, ob $y = u$ erit

$$P = \frac{2c^2m^2 + gmu^2}{1+m^2} \quad \text{atque} \quad \frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2 du}{2c^2m^2 + gmu^2} \quad \text{atque} \quad \frac{P dy}{y dP} = \frac{2mc^2 + gu^2}{3gu^2};$$

atque posito $u = f$ distabit quoque linea absidum a praecedente absidum angulo

$$180 \sqrt{\frac{2mc^2 + gf^2}{3gf^2}} \text{ grad.}$$

Quoniam autem proxime est $2c^2 = gmf^2$, erit angulus inter duas absides interceptus $= 180 \sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$, erit angulus inter duas absides interceptus maior quam $103^\circ 55'$.

SCHOLION 2

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae movabitur et vel circulos describet vel alias curvas non parum elegantes, quomodo enim

mentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos
 et, a Cel. ION. BERNOULLIO in Act. Lips. A. 1715 iam est expositus sub
 motus *turbinatorii*.¹⁾ At si curva non fuerit circulus, nemo, quantum
 hunc penduli motum vel consideravit vel determinavit.²⁾

DEFINITIO 6

5. *Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsus motus.*
 In hoc casu pendulum non in eodem plano verticali movetur, sed curvam
 in superficie sphaerica, cuius radius est ipsa penduli
 longitudo, sistam.

PROPOSITIO 99

PROBLEMA

6. *Penduli aut motum turbinatorium incitati determinare motum et lineam
 quam in superficie sphaerica describit.*

SOLUTIO

In corpore motum pendulo est alligatum, in superficie sphaerica move-
 tur, cuius radius est longitudo penduli. Sit haec longitudo seu radius
 a ; erit

$$z = a - \sqrt{a^2 - u^2}$$

in circuli AM (Fig. 96, p. 447 et Fig. 97, p. 449). Erit ergo

$$q = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \text{et} \quad dq = \frac{a^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2q dq}{u^2 du} = \frac{2a^2}{u(a^2 - u^2)^2}$$

ION. BERNOULLI, *De centro turinationis incerta nova*, Acta erud. 1715, p. 242; *Opera*
 tom. 2, Lausannae et Genovae 1742, p. 187; vide etiam CHR. HUYGENS, *Horologium oscil-*
lans Paris 1673, Pars V; *Opera varia*, Vol. I, Lugduni Batavorum 1724, p. 185. P. St.

NEUTRONUM hoc problema considerasse nec non solutionis compotem fuisse verisimile
Philosophiae naturalis principia mathematica, Londini 1687, lib. I sect. X prop. LV
 P. St.

Ex his invenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, ut
 portio BQC libere moveatur.

$$\frac{2ba - 2gaa - 3qa}{a} \omega^2 = v^2$$

Atque pro curva BQC haec habebitur aequatio

$$P^2 = v^2 \left\{ (b - ga)\omega^2 - a^2 + g\omega^2 - a^2 \right\}$$

quam ad projectionem BQC construendam sufficit. At si con-
 sideretur perpendicularitas ad radium AB , id quod semper obtinere
 debet, sit linea recta, quia vis centripeta deorsum deorsum
 $AB = f$ erit

$$v = a + 1/2 a^2 f^2$$

atque

$$b = ga + g1/a^2 f^2 = \frac{v^2}{f^2}$$

Si praeterea fuerit

$$2a^2 = \frac{gf^2}{\{ \omega^2 - f^2 \}}$$

curva in circulo revolvetur, cuius radius est $1/f$, celeritate de-

$$\frac{v}{f^2} = \frac{gf^2}{2\{ \omega^2 - f^2 \}}$$

Penduli vero integras oscillationes in eodem tempore, adeo
 est $1/(a^2 - f^2)$. Sin autem non fuerit $2a^2 = \frac{gf^2}{\{ \omega^2 - f^2 \}}$, differe-
 ntia valde exigua, curva BQC a circulo non multum discrepat
 quo positiones absidorum inveniantur, erit iuxta propositionem
 crascentis

$$y = u \text{ et } P = \frac{u^2}{a^2} \{ 2b - 2ga + 3g1/a^2 - a^2 \}$$

Hinc est

$$\frac{dP}{P} = \frac{1du}{u} - \frac{3guda}{\{ 2b - 2ga + 3g1/a^2 - a^2 \}}$$

atque

$$\frac{y dP}{P dy} = \frac{1}{4} - \frac{3ga^2}{\{ 2b - 2ga + 3g1/a^2 - a^2 \}}$$

si foret est circulus, ponatur $u = f$ atque

$$2b - 2ga = \frac{gf^3}{V(a^2 - f^2)} - 2gV(a^2 - f^2) = \frac{3gf^3 - 2ga^3}{V(a^2 - f^2)},$$

prodit

$$\frac{y dP}{P dy} = 4 - \frac{3f^2}{a^2}.$$

tur intervallum inter duas absides esse angulum

$$\frac{180a}{V(4a^2 - 3f^2)} \text{ grad.}$$

est angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime distat, dissitus in quo pendulum axi est proximum. Q. E. I.

COROLLARIUM 1

Quo igitur pendulum $AB = a$ (Fig. 98) motu turbatorio circum scribat, oportet, ut eius celeritas debita sit altitudini $\frac{g}{2} \frac{BO^2}{AO}$.

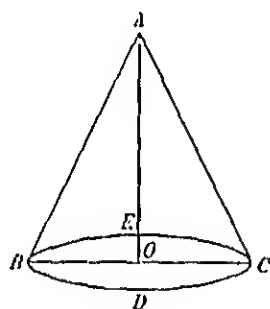


Fig. 98.

COROLLARIUM 2

Longitudo vero penduli, quod oscillationes minimas integras eodem solvit, quo periodus in circulo BDC conficitur, est $= AO$.

COROLLARIUM 3

Tempora ergo, quibus diversi circuli motu turbatorio a pendulo runtur, sunt in subduplicata ratione altitudinum AO .

COROLLARIUM 4

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximam efficiat, cujus radius est a , celeritas infinite magna requiritur atque quatuor periodus tempore infinito parvo absolvitur.

COROLLARIUM 5

901. Si radius circuli BO fuerit valde parvus respectu penduli AB , congruent periodi motus turbinatorii cum oscillationibus integris eius penduli.

COROLLARIUM 6

902. Si curva descripta non fuerit circulus, sed figura proxima ad circulum BO valde parvum, erit angulus inter duas absides 90° non rectus.

COROLLARIUM 7

903. Hoc vero casu curva a corpore descripta erit ellipsis contigens in A . Quod ex vi centripeta colligitur, quae tunc ipsis distantibus proportionalis.

COROLLARIUM 8

904. Quo maior autem est radius BO , eo maior quoque erit angulus inter duas absides interceptus. Atque si fiat $BO = BA$, erit hic angulus

COROLLARIUM 9

905. Si angulus BAO fuerit 30 graduum, erit $BO = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} a$. Angulus ergo inter duas absides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum $50'$. Projectionis ergo in plano horizontali haec erit figura $abcdefghik$ (fig. 99, p. 459) in qua absides summæ sunt in a, c, e, g, i et imaæ in d, f, h, k .

COROLLARIUM 10

906. In hac igitur figura linea absidum movetur in consequentia; singulis periodis circiter 39° progredietur in consequentia.

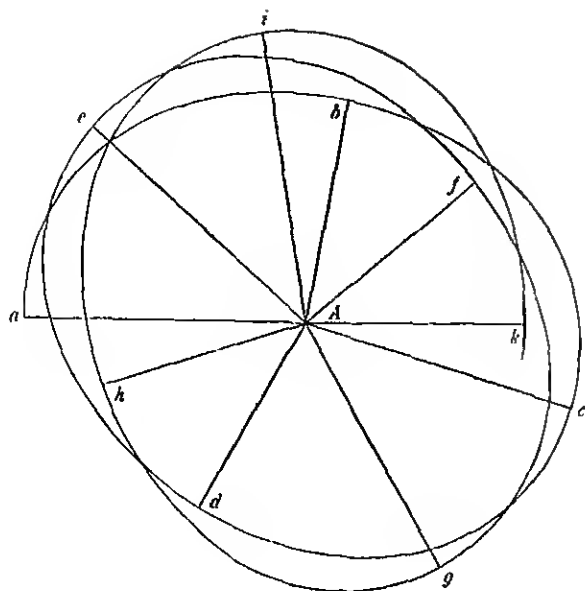


Fig. 90.

COROLLARIUM 11

7. Sin autem illo angulus BAO minor fuerit quam 30 graduum, tum etiam erit absidum progressio. Quae quo pro quovis angulo BAO cognoscatur, fractionem

$$\frac{a}{\sqrt{(4a^3 - 3f^2)}}$$

in resolve, quae erit sequens

$$\frac{1}{2} + \frac{3f^2}{16a^2} + \frac{27f^4}{256a^4} + \text{etc.}$$

ergo periodo linea absidum promovetur angulo $\frac{186f^2}{a^2}$ graduum quamvis, si f valde est parvum.

COROLLARIUM 12

8. Ex his apparet promotionem lineae absidum in singulis periodis esse in duplicata ratione sinus anguli BAO .

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS I ET II CONTINENTUR

- APOLLONIUS I 26, 338, 339; II 103
 ARCHIMEDES I 7, 27, 145
 BASNAGE II 163
 BERNOULLI, DAN. I 56, 150; II 193, 382
 BERNOULLI, JAC. II 113, 167
 BERNOULLI, JOH. I 60, 221, 222, 224, 318,
 325, 328, 333, 373; II 52, 90, 113, 163,
 167, 179, 219, 366, 367, 455
 BERNOULLI, NIC. I 333
 COTES, R. II 228
 CRAIG, I. II 167
 ENESTROEM, G. I 333; II 367
 EULER, I. A. I 100
 EULER, L. I 100 (Commentatio 19 indicis
 ENKSTROMMIANI), 252 (Comm. 232),
 II 24 (Comm. 9), 44 (Comm. 44), 65
 (Comm. 41), 164 (Comm. 42, 56), 180
 (Comm. 27), 193 (Comm. 12, 24), 196
 (Comm. 31), 206 (Comm. 12), 211 (Comm.
 12), 296 (Comm. 19), 366 (Comm. 13),
 367 (Comm. 1), 373 (Comm. 25), 375
 (Comm. 19), 423 (Comm. 9)
 GALILEI, G. I 7, 50, 68, 191
 GERHARDT, C. I. II 102, 113, 167
 GÜNTHER I 150
 HALLEY, E. I 196
 HERMANN, L. I 8, 222, 318; II
 170, 175, 190, 317, 367
 HUYGENS, CHR. I 75, 145, 207,
 5, 19, 21, 62, 69, 71, 73, 261
 KEILL, L. I 196, 318
 KEPLER, I. I 31, 32, 220
 LA HIRE, PH. DE II 273
 LAMBERT, I. H. I 145
 LEGENDRE, A. M. I 145
 LEIBNIZ, G. W. I 294; II 102, 1
 L'HOSPITAL, G. F. DE II 90, 16
 MACHIN, I. I 274; II 170
 MOIVRE, A. DE I 196
 MONTAGUE, C. II 167
 NEIL, W. I 211; II 102, 103
 NEWTON, I. I 8, 9, 11, 30, 31, 5
 85, 158, 187, 196, 220, 22
 232, 236, 238, 245, 251, 25
 318, 328, 333, 336, 339, 3
 190, 268, 273, 288, 296, 455
 RICCATI, V. II 196, 219
 RUDIO, F. I 145
 SAULT, R. II 167
 SAURIN, I. II 52
 VARIIGNON, P. I 7, 222; II 90
 WOLF, CHR. I 8